Idealtheorie in HADAMARD-Algebren

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Jochen Zohner
Oberhof 30
35440 Linden

dem Fachbereich
Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Betreuer
Prof. Dr. Thomas Bartsch

Zweitgutachter
Apl. Prof. Dr. Rainer Brück
(Technische Universität Dortmund)

Gießen, im Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Einführung

Im Jahre 1899 fand HADAMARD den nach ihm bekannten Multiplikationssatz, der besagt, daß die koeffizientenweise Multiplikation zweier TAYLOR-Reihen bei Entwicklung um den Nullpunkt eine Funktion

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n * \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n) z^n := \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \widehat{g}(n) z^n$$

erzeugt, die sich auf ein Gebiet $G_1 * G_2 = (G_1^c \cdot G_2^c)^c$ analytisch fortsetzen läßt, falls sich die beiden Faktoren auf die sternförmigen Gebiete G_1 bzw. G_2 fortsetzen lassen (s. [H]). Dieser Beweis ging 1955 in [Bi] in die Literatur ein.
1964 und 1971 untersuchte BROOKS in [Br1] und [Br2] die durch das HADAMARD-Produkt enstehende Algebra holomorpher Funktionen im Einheitskreis und fand dabei folgendes heraus:

- BROOKSscher Darstellungssatz
  Es sei $\phi : H(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es eine im abgeschlossenen Einheitskreis holomorphe Funktion g, so daß für alle $f \in H(\mathbb{D})$ die Darstellung $\phi(f) = (g * f)(1)$ gilt.
  Ist ϕ zusätzlich multiplikativ (d.h. $\phi(f * g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$), so ist $\phi(f) = \widehat{f}(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

- BROOKSscher Anzahlsatz
  Wir betrachten die Menge Max $H(\mathbb{D})$ *aller maximalen Ideale der Algebra $H(\mathbb{D})$ mit der* HADAMARD-*Multiplikation. Dann hat* Max $H(\mathbb{D})$ *die gleiche Mächtigkeit, wie die* STONE-ČECH-*Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}_0$ der natürlichen Zahlen.*

In [BNS] wurde die algebraische Struktur von Räumen stetiger Funktionen $C(X)$ mit Hilfe topologischer Methoden untersucht, in dem die Menge der maximalen Ideale $\operatorname{Max} C(X)$ mit der sog. HULL-KERNEL-TOPOLOGIE ausgestattet wird. Diese Topologie ist so konzipiert, daß die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Max} C(X)$ durch die Ideale $I \subseteq C(X)$ erzeugt werden. Ihren Namen verdankt die HULL-KERNEL-TOPOLOGIE der Tatsache, daß in $\operatorname{Max} C(X)$ der topologische Abschluß einer Menge $Q \subseteq \operatorname{Max} C(X)$, die Hülle des Kerns von Q, also die Menge aller maximalen Ideale, die $\bigcap Q$ enthalten, ist. $\operatorname{Max} C(X)$ wird mit Hilfe von Ultrafiltern von Nullstellenmengen dargestellt und damit gezeigt, daß $\operatorname{Max} C(X)$ und $\operatorname{Max} C_B(X)$ homöomorph zur STONE-ČECH-Kompaktifizierung βX sind. BROOKS griff diese Methode auf, und konnte folgendes zeigen.

- BROOKSscher Homöomorphiesatz
  Stattet man $\operatorname{Max} H(\mathbb{D})$ *mit der* HULL-KERNEL-TOPOLOGIE *aus, so ist* $\operatorname{Max} H(\mathbb{D})$ *homöomorph zu* $\beta\mathbb{N}_0$.

- BROOKSscher Primidealsatz
  In $H(\mathbb{D})$ *ist jedes Primideal in genau einem maximalen Ideal enthalten.*

- BROOKSscher Invertierbarkeitssatz
  Eine Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\widehat{f}$ *keine Nullstellen besitzt und* $|\widehat{f}(n)|^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$ *gilt.*

Diese Ergebnisse gingen 1966 in [P] in die Literatur ein.
Im Jahre 1992 konnte MÜLLER in [M1] zeigen, daß HADAMARDs Multiplikationssatz auch ohne die Einschränkung auf sternförmige Gebiete gültig ist. Insbesondere folgt aus MÜLLERs Verallgemeinerung, daß jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, dessen Komplement eine multiplikative Halbgruppe mit Eins ist, eine topologische Algebra $H(G)$ mit der HADAMARD-Multiplikation erzeugt. Ein solches Gebiet nennen wir zulässig und die so entstandene Algebra eine HADAMARD-Algebra.
Seit dieser Erkenntnis wurde in einigen Arbeiten untersucht, welche der von BROOKS bewiesenen Eigenschaften der HADAMARD-Multiplikation auch für andere zulässige Gebiete außer dem Einheitskreis gelten. Inbesondere wurden von BRÜCK UND MÜLLER in [BM2] die Frage nach der Gültigkeit des BROOKSschen Anzahl- und Homöomorphiesatzes für

beliebige HADAMARD-Algebren gestellt.

In [Z] haben wir gesehen, daß der BROOKSsche Homöomorphiesatz für kein anderes Gebiet als den Einheitskreis gilt. Gesehen haben wir dies, in dem wir die Eigenschaften der HULL-KERNEL-TOPOLOGIE genauer untersuchten, und diese im allgemeinen als Kompaktifizierung identifizieren konnten.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun, diese Untersuchungen fortzusetzen, um auch die Frage nach der Übertragbarkeit der anderen Ergebnisse BROOKS' auf beliebige, zulässige Gebiete klären zu können.

Wir werden dazu in Kapitel I weitere Eigenschaften der HULL-KERNEL-TOPOLOGIE beweisen. Wir interessieren uns dabei zuerst für die Konvergenz in den Strukturräumen Max A beliebiger Algebren A und werden dafür einfache Kriterien angeben können. Aus diesen werden wir Kriterien für die HAUSDORFF-Eigenschaft der HULL-KERNEL-TOPOLOGIE ableiten können. Diese werden uns zeigen, daß der BROOKSsche Primidealsatz gleichbedeutend mit der HAUSDORFF-Eigenschaft des zugehörigen Strukturraums Max $H(G)$ ist.

Um den BROOKSschen Anzahlsatz auf Max $H(G)$ zu untersuchen, werden wir mit Hilfe des Homomorphiesatzes die in [Z] bewiesenen Resultate weiter verallgemeinern können. Wir erhalten daraus ein hinreichendes Kriterium für die Gleichmächtigkeit mit der STONE-ČECH-Kompaktifizierung. Dieses werden wir in Kapitel II anwenden, um zu zeigen, daß der BROOKSsche Anzahlsatz tatsächlich für alle zulässigen Gebiete gilt. Zudem werden wir sehen, daß zwei HADAMARD-Algebren nur dann homöomorphe Strukturräume besitzen können, wenn die zugehörigen Gebiete sich am Rande des Einheitskreises nicht unterscheiden.

In Kapitel III werden wir einen Konvergenzsatz für Potenzreihen von Taylor-Koeffizienten erhalten, woraus wir Aufschluß über invertierbare Elemente und Eigenschaften der maximalen Ideale erhalten werden. Wir werden eine Isomorphie von HADAMARD-Algebren anhand der erlaubten singulären Punkte am Rand des Einheitskreises ableiten und die HAUSDORFF-Eigenschaft (und damit den BROOKSschen Primidealsatz) im Falle aller mehrfach zusammenhängenden Gebiete falsifizieren können.

In Kapitel IV werden wir Zusammenhänge zwischen dem HADAMARD-Produkt, komplexen Borel-Maßen und stetigen linearen Funktionalen untersuchen. Wir werden dadurch zu einem sehr kurzen und eingängigen Beweis des HADAMARDschen Multiplikationssatzes gelangen. Diesen erhalten wir aus der CAUCHY-Transformation, wie sie in [C] eingeführt wurde. Durch eine Übertragung auf stetige, lineare Funktionale können wir den BROOKSschen Darstellungssatz verallgemeinern und den Dualraum $H(G)^\dagger$ mit Hilfe des HADAMARD-Produkts darstellen. Mit Hilfe dieser Darstellung werden wir einen elementaren Test für die Invertierbarkeit in HADAMARD-Algebren über einfach zusammenhängenden Gebieten beweisen.

Kapitel I

Die Hull-Kernel-Topologie

Um Algebren holomorpher Funktionen $H(G)$ untersuchen zu können, stellt es sich als zweckmäßig heraus, den Raum der zugehörigen TAYLOR-Koeffizienten

$$\widehat{H}(G) = \{\ \widehat{f} \mid f \in H(G)\ \} \subseteq C(\mathbb{N}_0) = C(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$$

zu betrachten, da so die HADAMARD-Multiplikation in die übliche, punktweise Multiplikation überführt wird, und Räume stetiger Funktionen bereits Gegenstand diverser Untersuchungen gewesen sind. Wir betrachten im folgenden also Subalgebren $A \subseteq C(X)$ und stellen fest, daß jede dieser Algebren kommutativ ist. Betrachten wir die Kerne der Auswertungshomomorphismen $f \in A \mapsto f(x)$ und bezeichnen diese mit

$$\operatorname{Kern} x := \{\ f \in A \mid f(x) = 0\ \},$$

so sind diese Mengen stets maximale Ideale in A. Wir bezeichnen die Menge aller maximalen Ideale einer Algebra A mit $\operatorname{Max} A$. Dann ergibt sich für Subalgebren $A \subseteq C(X)$ unmittelbar die wesentliche Eigenschaft

$$\bigcap \operatorname{Max} A \subseteq \bigcap_{x \in X} \operatorname{Kern} x = \{f \in A \mid f(x) = 0 \ \text{ für alle } x \in X\ \} = \ \{0\}.$$

Wir schließen diese Eigenschaft, so wie die Existenz eines Eins-Elements in die Definition einer entsprechenden Klasse von Algebren mit ein, die wir im folgenden untersuchen wollen.

Definition 1.0.1. Wir definieren die Klasse Alg als die Gesamtheit aller kommutativen Algebren mit Eins-Element, die die Eigenschaft $\bigcap \operatorname{Max} A = \{0\}$ erfüllen. Diese enthält insbesondere alle Subalgebren $A \subseteq C(X) = C(X, \mathbb{C})$, die die konstanten Funktionen enthalten. Ferner bezeichen wir mit $\operatorname{Alg} A$ alle Subalgebren $A' \in \operatorname{Alg}$ von A.

Wir führen nun die Hull-Kernel-Topologie auf den Elementen der Klasse Alg ein, in dem wir die Eigenschaften einer passenden Mengenabbilung verwenden.

Lemma 1.0.2 (Die $\mathfrak{M}$-Abbildung)**.** *Es sei $A \in \operatorname{Alg}$ und $I \subseteq A$. Dann definieren wir*

$$\mathfrak{M}(I) := \{M \in \operatorname{Max} A \mid M \supseteq I\}.$$

Für diese Abbildung gelten dann folgende Rechenregeln:

$$\text{(0.1)} \qquad \textit{Ein Ideal } I \textit{ ist genau dann echt } (I \neq A), \textit{ wenn } \mathfrak{M}(I) \neq \emptyset \textit{ ist.}$$

$$\text{(0.2)} \qquad \textit{Für alle Ideale } I, J \subseteq A \textit{ gilt } \mathfrak{M}(I) \cup \mathfrak{M}(J) = \mathfrak{M}(I \cap J) = \mathfrak{M}(I \odot J).$$

Dabei definieren wir $I \odot J$ als das vom direkten Produkt $I \cdot J$ erzeugte Ideal.

$$\text{(0.3)} \qquad \textit{Für jede Menge von Idealen } \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{P}(A) \textit{ gilt } \bigcap\{\mathfrak{M}(I) | I \in \mathfrak{I}\} = \mathfrak{M}(\oplus \mathfrak{I}),$$

wobei $\oplus \mathfrak{I}$ das Summenideal und damit die direkte, endliche Summe aller Ideale $I \in \mathfrak{I}$ bezeichnet.

$$\text{(0.4)} \qquad \begin{gathered} \textit{Die Menge } \mathfrak{A} := \{\mathfrak{M}(I) \mid I \subseteq A \textit{ ist ein Ideal }\} \\ \textit{bildet ein System abgeschlossener Mengen, mit denen} \\ (\operatorname{Max} A, \mathfrak{A}) \textit{ zu einem kompakten T1-Raum wird.} \end{gathered}$$

Wir nennen die so erzeugte Topologie, die Hull-Kernel-Topologie *auf* $\operatorname{Max} A$. *Die namensgebende Eigenschaft, entnehmen wir der folgenden Gleichung.*

$$\text{(0.5)} \qquad \textit{Der Abschluß einer Teilmenge } Q \subseteq \operatorname{Max} A \textit{ ist gegeben durch } \overline{Q} = \mathfrak{M}(\bigcap Q).$$

Das Fundament all unserer weiteren Untersuchungen bildet nun der folgende Satz, den wir bereits in [Z] bewiesen haben, welcher die algebraische Struktur einer Algebra mit dem topologischen Begriff der Kompaktifizierung in Zusammenhang bringt. Wir verwenden dazu folgende Begriffe.

Definition 1.0.3. Eine Algebra $A \in \operatorname{Alg} C(X)$ heißt regulär (über X), wenn jede abgeschlossene Menge $M \subsetneqq X$ von jedem Punkt $p \in X \setminus M$ durch eine Funktion aus $f \in A$ getrennt wird, so daß $f|_M \equiv 0$ und $f(p) = 1$ ist.
A heißt normal (über X), wenn je zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen $P, Q \subsetneqq X$ durch eine Funktion $f \in A$ getrennt werden, das heißt, $f|_P \equiv 0$ und $f|_Q \equiv 1$.

Satz 1.0.4 (Kompaktifizierungssatz). *Es sei X ein* HAUSDORFF*-Raum, $A \in \operatorname{Alg} C(X)$, eine über X reguläre Algebra. Wir definieren*

$$\mu_A : X \to \operatorname{Max} A \ \textit{durch}\ \mu_A(x) := \operatorname{Kern} x = \{f \in A \mid f(x) = 0\} \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Dann ist $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ eine Kompaktifizierung von X.

Wir haben dadurch die algebraische Struktur von A mit einer Kompaktifizierung in Verbindung gebracht, deren Eigenschaften sich als charakteristisch für die Algebra erweisen. Wir verwenden im weiteren den Begriff der Äquivalenz, der den Begriff der Homöomorphie verschärft.

Definition 1.0.5. Wir nennen zwei Kompaktifizierungen (K, κ) und (M, μ) eines vollständig regulären, topologischen Raumes X äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus $\Phi : K \to M$ gibt, so daß $\Phi \circ \kappa = \mu$ ist.

Wir haben in [Z] gesehen, daß die Übertragbarkeit der Homöomorphie von $\operatorname{Max} H(G)$ zur STONE-ČECH-Kompaktifizierung (BROOKSscher Homöomorphiesatz) auf andere HADAMARD-Algebren daran scheiterte, daß der Raum der Koeffizienten $\widehat{H}(G)$ nicht normal über $\mathbb{N}_0$ ist. Dies ist Gegenstand des folgenden Satzes.

Satz 1.0.6 (Äquivalenz-Kriterium). *Es sei X ein normaler topologischer Raum und $A \in \operatorname{Alg} C(X)$ beliebig. $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ ist genau dann äquivalent zur* STONE-ČECH*-Kompaktifizierung $(\beta X, \beta)$, wenn $\operatorname{Max} A$ ein* HAUSDORFF*-Raum und $A : X$ normal ist.*
Ist X diskret, so ist $\operatorname{Max} A$ genau dann homöomorph zu βX, wenn $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ äquivalent zu $(\beta X, \beta)$ ist.

Wir werden im folgenden sehen, daß die HAUSDORFF-Eigenschaft der HULL-KERNEL-TOPOLOGIE im allgemeinen keine triviale Eigenschaft sondern sehr schwer nachzuweisen ist. Im Falle von $H(\mathbb{D})$ gelang uns dies in [Z] anhand des folgenden Satzes, der gleichzeitig die Äquivalenz gewisser Algebren mit der STONE-ČECH-Kompaktifizierung sicherstellt. Insbesondere ersehen wir darin eine Verallgemeinerung des Homöomorphiesatzes von BROOKS, die dessen Ursprung offenbart.

Satz 1.0.7. *Es sei X ein normaler topologischer Raum, $A \subseteq C(X)$ eine Algebra, die alle beschränkten Funktionen enthält ($A \supseteq C_B(X)$). Dann ist $\operatorname{Max} A$ äquivalent zur STONE-ČECH-Kompaktifizierung βX.*

Daraus resultierte unmittelbar das folgende Kriterium für die Äquivalenz des Strukturraums einer HADAMARD-Algebra mit der STONE-ČECH-Kompaktifizierung.

Satz 1.0.8 (Äquivalenz-Kriterium für HADAMARD-Algebren)**.** *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein zulässiges Gebiet. Es ist $\operatorname{Max} H(G)$ genau dann homöomorph zur STONE-ČECH-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}_0$, wenn $G = \mathbb{D}$ ist.*

Bisher unbeantwortet blieb jedoch, ob es wenigstens eine Eins-zu-Eins-Abbildung zwischen den Strukturräumen der verschiedenen HADAMARD-Algebren gibt, und ob es Äquivalenzen oder Homöomorphien zwischen Strukturräumen von HADAMARD-Algebren gibt, die nicht dem Einheitskreis entspringen. Um dies zu untersuchen, benötigen wir eine Reihe von Vorbereitungen, die die Struktur der Räume $\operatorname{Max} A$ mit der HULL-KERNEL-TOPOLOGIE für allgemeinere Algebren offenbaren.

§ 1 Konvergenzkriterien

In diesem Abschnitt wollen wir ein handliches Kriterium für die Konvergenz in $\operatorname{Max} A$ mit der durch die abgeschlossenen Mengen $\{\mathfrak{M}(I) : I \leq A \text{ Ideal }\}$ erzeugten HULL-KERNEL-TOPOLOGIE, herleiten. Da diese im allgemeinen nicht metrisierbar ist, verwenden wir bei den folgenden Überlegungen Netze und die folgenden, damit verbundenen Begriffe:
Ein Netz $(x_\delta)_{\delta \in D}$ in einer Menge X ist eine Abbildung von einer gerichteten, nichtleeren Menge D nach X. Wir sagen, ein Netz hat schließlich eine Eigenschaft E, wenn es ein $\delta_0 \in D$ gibt, so daß x_δ die Eigenschaft E für alle $\delta \geq \delta_0$ besitzt. Entsprechend bezeichnen wir E als häufig zutreffend, wenn es zu jedem $\delta \in D$ ein $\sigma \geq \delta$ gibt, so daß x_σ die

Eigenschaft E erfüllt. Offenbar ist jede schließlich zutreffende Eigenschaft auch häufig zutreffend.

Ein Netz $(x_\delta)_{\delta\in D}$ in einer Menge X heißt universell, wenn für alle $A \subseteq X$ entweder $x_\delta \in A$ oder $x_\delta \in X \setminus A$ schließlich richtig ist. In einem universellen Netz trifft somit jede häufig zutreffende Eigenschaft auch schließlich zu.

Wir verwenden des weiteren die Mengenlimites

$$\underline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta = \bigcup_{\delta\in D} \bigcap_{\gamma\geq\delta} M_\gamma = \{f \in A \mid f \in M_\delta \ \text{ schließlich } \}$$

$$\overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta = \bigcap_{\delta\in D} \bigcup_{\gamma\geq\delta} M_\gamma = \{f \in A \mid f \in M_\delta \ \text{ häufig } \},$$

wobei ersterer stets ein Ideal ist, und letzterer stets ein multiplikativ abgeschlossenes Komplement besitzt. Wir erhalten nun das folgende Konvergenzkriterium.

Lemma 1.1.1. *Es sei* $A \in \mathrm{Alg}$, $(M_\delta)_{\delta\in D}$ *ein Netz in* $\operatorname{Max} A$ *und* $M \in \operatorname{Max} A$, *dann ist*

$$M_\delta \to M(\delta \in D) \ \ \textit{genau dann, wenn} \ \ \overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta \subseteq M \tag{1.6}$$

$$M \ \textit{ein Häufungspunkt von} \ (M_\delta)_{\delta\in D} \ \ \textit{genau dann, wenn} \ \ \underline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta \subseteq M \tag{1.7}$$

$$\textit{Ist} \ (M_\delta)_{\delta\in D} \ \textit{universell, so ist} \ \underline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta = \overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta \ \ \textit{ein Primideal.} \tag{1.8}$$

Beweis. Es sei $M_\delta \to M(\delta \in D)$ und $f \in M^c$. Dann ist $\mathfrak{M}(f)^c$ eine offene Umgebung von M, und somit $M_\delta \in \mathfrak{M}(f)^c$ schließlich. Das heißt

$$f \in \underline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta^c = (\overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta)^c$$

Da $f \in M^c$ beliebig war, ist

$$M^c \subseteq (\overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta)^c \ \text{ und somit } \ \overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta \subseteq M.$$

Ist umgekehrt $\overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta \subseteq M$ und $\mathfrak{M}(I)^c$ eine beliebige offene Umgebung von M, so gibt es ein $f \in I \setminus M$. Daher ist

$$f \in M^c \subseteq (\overline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta)^c = \underline{\lim}_{\delta\in D} M_\delta^c,$$

so daß schließlich $f \in M_\delta^c$ und damit $M_\delta \in \mathfrak{M}(f)^c \subseteq \mathfrak{M}(I)^c$ sein muß, woraus die Konvergenz folgt.

Ist M ein Häufungspunkt von $(M_\delta)_{\delta\in D}$, so gibt es ein Subnetz $(M_{\sigma(\delta)})_{\delta\in D'}$, welches gegen M konvergiert. Für dieses gilt

$$\varliminf_{\delta\in D} M_\delta \subseteq \varliminf_{\delta\in D'} M_{\sigma(\delta)} \subseteq \varlimsup_{\delta\in D'} M_{\sigma(\delta)} \subseteq M.$$

Ist umgekehrt

$\varliminf_{\delta\in D} M_\delta \subseteq M$ und $\mathfrak{M}(I)^c$ eine offene Umgebung von M, so gibt es wiederum ein

$$f \in I \setminus M \subseteq M^c \subseteq (\varliminf_{\delta\in D} M_\delta)^c = \varlimsup_{\delta\in D} M_\delta^c.$$

Dies bedeutet, daß häufig $f \in M_\delta^c$ und somit $\mathfrak{M}_\delta \in \mathfrak{M}(f)^c \subseteq \mathfrak{M}(I)^c$ sein muß. Das heißt, M ist Häufungspunkt von $(M_\delta)_{\delta\in D}$.

Die letzte Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß $\varliminf M_\delta$ stets ein Ideal ist, und $(\varlimsup M_\delta)^c$ multiplikativ abgeschlossen ist. Die Gleichheit der beiden Limites erkennt man wie folgt:

Ist $f \in M_\delta$ häufig, so ist $M_\delta \in \mathfrak{M}(f)$ häufig und damit schließlich, da $(M_\delta)_{\delta\in D}$ universell ist. Da $M_\delta \in \mathfrak{M}(f)$ schließlich, liegt somit $f \in M_\delta$ schließlich, wodurch die beiden Limites übereinstimmen. □

Wir können daraus eine interessante Konsequenz ableiten.

Korollar 1.1.2. *Es sei X ein diskreter topologischer Raum, $A \subseteq C(X)$ eine über X normale Algebra mit Eins-Element und $(x_\delta)_{\delta\in D}$ ein Netz in X, so daß $(\mu(x_\delta))_{\delta\in D}$ in* $\operatorname{Max} A$ *konvergiert. Dann ist $(x_\delta)_{\delta\in D}$ universell.*

Beweis. Es sei $B \subseteq X$ beliebig und M der Grenzwert von $(\mu(x_\delta))_{\delta\in D}$. Dann gilt für die Indikatorfunktionen $f := 1_B \in A$ und $1 - f = 1_{B^c} \in A$, da A normal über X ist, und X diskret. Angenommen es gelte $x_\delta \in B$ häufig und $x_\delta \in B^c$ häufig. Dann ist $f \in \mu(x_\delta)$ häufig und $1 - f \in \mu(x_\delta)$ häufig. Somit gilt

$$f, 1 - f \in \varlimsup_{\delta\in D} \mu(x_\delta) \subseteq M$$

woraus $1 \in M$ folgt, was einen Widerspruch darstellt. Somit muß entweder $x_\delta \in B$ schließlich or $x_\delta \in B^c$ schließlich gelten. Das heißt, $(x_\delta)_{\delta\in D}$ ist universell. □

Da aber $C(X)$ über X normal ist, und $\operatorname{Max} C(X)$ stets kompakt, hat jedes Netz $(\mu(x_\delta))_{\delta\in D}$ ein in $\operatorname{Max} C(X)$ konvergentes Subnetz, welches universell sein muß. Wir haben für den Beweis des Kompaktifizierungssatzes aber die Existenz universeller Subnetze gar nicht verwendet, sondern lediglich die Existenz maximaler Ideale. Dies erlaubt einen Ringschluß: Das Auswahlaxiom impliziert das Lemma von ZORN, welches die Existenz maximaler Ideale nach sich zieht, welche den Kompaktifizierungssatz impliziert. Dieser hat als Konsequenz die Existenz universeller Subnetze, woraus sich der Satz von TYCHONOFF ableiten läßt, welcher wiederum das Auswahlaxiom impliziert. Alle Sätze sind somit äquivalent.

§ 2 Die Hausdorff-Eigenschaft

Als nächste Konsequenz des Konvergenzkriteriums können wir ein Kriterium für die HAUSDORFF-Eigenschaft von $\operatorname{Max} A$ ableiten. Wir schreiben, A hat HAUSDORFF-Struktur, wenn $\operatorname{Max} A$ ein HAUSDORFF-Raum ist.

Satz 1.2.1. *Eine Algebra $A \in \mathrm{Alg}$ hat genau dann* HAUSDORFF*-Struktur, wenn jedes Primideal in A nur in einem maximalen Ideal enthalten ist.*
Insbesondere sind zwei maximale Ideale $M, N \in \operatorname{Max} A$ genau dann durch offene Mengen trennbar, wenn sie kein gemeinsames Primideal enthalten.
Ist $\operatorname{Max} A$ ein HAUSDORFF*-Raum, $P \subseteq A$ ein Primideal und $M \in \mathfrak{M}(P)$, so ist*

$$M = \{f \in A \mid 1 \notin P \oplus f \odot A\}.$$

Beweis. Es seien $M, N \in \operatorname{Max} A$ trennbar, dann ist $0 \in M^c \odot N^c$. Angenommen, es gäbe ein Primideal $P \subseteq M \cap N$, so wäre

$$0 \in M^c \odot N^c \subseteq P^c \odot P^c \subseteq P^c \subseteq \{0\}^c,$$

was zu einem Widerspruch führt.
Sind umgekehrt M und N nicht trennbar, so gibt es ein Netz $(M_\delta)_{\delta\in D}$ welches gegen beide Werte konvergiert. Da jedes Netz ein universelles Subnetz besitzt, und jedes Subnetz ebenfalls gegen alle Grenzwerte konvergieren muß, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $(M_\delta)_{\delta\in D}$ universell ist. In diesem Fall ist jedoch $\underline{\lim}\, M_\delta = \overline{\lim}\, M_\delta \subseteq M \cap N$

ein Primideal, welches in beiden maximalen Idealen enthalten ist.
Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Tatsache, daß jedes Ideal, welches die Eins nicht enthält, in einem maximalen Ideal enthalten sein muß. Ist also $1 \notin P \oplus f \odot A$, so muß $\mathfrak{M}(P \oplus f \odot A) \neq \emptyset$ sein. Auf der anderen Seite ist $\mathfrak{M}(P \oplus f \odot A) \subseteq \mathfrak{M}(P) = \{M\}$. Zusammen folgt $\mathfrak{M}(P \oplus f \odot A) = \{M\}$ und damit $f \in M$. Ist umgekehrt $f \in M$, so ist $1 \notin M \supseteq P \oplus f \odot A$. □

Da dieses Kriterium in der Praxis eher zum Nachweis von Primidealen als zum Beweis der Hausdorff-Eigenschaft geeignet ist, wollen wir noch ein weiteres Kriterium angeben, welches sich unmittelbar auf die Struktur der Algebra bezieht.

Lemma 1.2.2. *Eine Algebra $A \in \mathrm{Alg}$ hat genau dann* Hausdorff*-Struktur, wenn es zu jedem $f \in A$ zwei Elemente $g, h \in A$ gibt, so daß $(1 - f \cdot g) \cdot (1 - (1 - f) \cdot h) = 0$ ist.*

Beweis. Es sei $\operatorname{Max} A$ ein Hausdorff-Raum, und $f \in A$. Dann ist $\operatorname{Max} A$ normal als kompakter Hausdorff-Raum. Offensichtlich sind $\mathfrak{M}(f)$ und $\mathfrak{M}(1 - f)$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von $\operatorname{Max} A$. Daher werden sie von zwei offenen Umgebungen $\mathfrak{M}(I)^c \supset \mathfrak{M}(f)$ und $\mathfrak{M}(J)^c \supset \mathfrak{M}(1 - f)$ getrennt, wobei I und J Ideale in A sind. Somit ist $\operatorname{Max} A = \mathfrak{M}(I) \cup \mathfrak{M}(J) = \mathfrak{M}(I \odot J)$ und daher $I \odot J = \{0\}$. Auf der anderen Seite ist $\mathfrak{M}(f) \cap \mathfrak{M}(I) = \emptyset$, und damit $1 \in (f \odot A) \oplus I$. Also gibt es ein $g \in A$, so daß $1 - f \cdot g \in I$ ist. Analog gibt es ein $h \in A$ with $1 - (1 - f) \cdot h \in J$. Daraus folgt

$$(1 - f \cdot g) \cdot (1 - (1 - f) \cdot h) \in I \odot J = \{0\} .$$

Zum Beweis der Rückrichtung sei $M, N \in \operatorname{Max} A$ mit $M \neq N$. Wir haben zu zeigen, daß es zwei offene, disjunkte Umgebungen von M und N gibt. Da $M \neq N$, gilt $1 \in M \oplus N$, so daß es ein $f \in M$ mit $1 - f \in N$ gibt. Somit existieren $g, h \in A$ mit $(1 - f \cdot g) \cdot (1 - (1 - f) \cdot h) = 0$. Es sei $I := (1 - f \cdot g) \odot A$ und $J := (1 - (1 - f) \cdot h) \odot A$. Dann ist $I \odot J = \{0\}$, also sind die offenen Mengen $\mathfrak{M}(I)^c$ and $M(J)^c$ disjunkt. Da offenbar $1 - f \cdot g \notin M$, und damit $M \in \mathfrak{M}(I)^c$ ist, und $1 - (1 - f) \cdot h \notin N$ so daß $N \in \mathfrak{M}(J)^c$ ist, folgt die Behauptung. □

§ 3 Mächtigkeit und homöomorphe Einbettungen

Der folgende Satz bildet das Fundament der weiteren Untersuchung, welche Algebren homöomorphe Strukturräume besitzen.

Satz 1.3.1 (Hom(ö)omorphiesatz)**.** *Es seien* $A, B \in \mathrm{Alg}$*, und* $\phi : A \to B$ *ein Ring-Homomorphismus. Dann sind* $\mathrm{Max}\,\phi(A)$ *und* $\mathfrak{M}(\mathrm{Kern}(\phi))$ *homöomorphe topologische Räume.*

Beweis. Wir definieren $\Phi : \mathfrak{M}(\mathrm{Kern}(\phi)) \to \mathrm{Max}\,\phi(A) : M \mapsto \phi(M)$, nehmen ohne Einschränkung an, daß $\phi(A) = B$ ist, und definieren $\mathfrak{I}(A)$ als die Menge aller Ideale der Algebra A. Da ϕ ein Ring-Homomorphismus ist, ist Bild und Urbild jedes Ideals selbst wieder ein Ideal.

Zwischenüberlegung 1.3.2. *Es seien* $I, J \in \mathfrak{I}(A)$ *mit* $I, J \supseteq \mathrm{Kern}\,\phi$*, dann ist* $I \subseteq J$ *genau dann, wenn* $\phi(I) \subseteq \phi(J)$*. Insbesondere ist* $I = J$ *genau dann, wenn* $\phi(I) = \phi(J)$*.*

Beweis. Es sei $\phi(I) \subseteq \phi(J)$ und $x \in I$ beliebig. Dann ist $\phi(x) \in \phi(I) \subseteq \phi(J)$. Also gibt es ein $y \in J$ mit $\phi(y) = \phi(x)$. Dann ist aber $x = (x - y) + y \in \mathrm{Kern}(\phi) \oplus J \subseteq J \oplus J \subseteq J$ und somit $I \subseteq J$. □

Ist nun $M \in \mathfrak{M}(\mathrm{Kern}\,\phi)$, so ist daher $\phi(M)$ ein Ideal. Ist $J \supset \phi(M)$ ein echt größeres Ideal in B, so ist $\phi^{-1}J \supset M$ ein echt größeres Ideal als M in A und damit $\phi^{-1}J = A$ woraus $J = B$ folgt, und $\phi M \in \mathrm{Max}\,B$ ist. Somit ist Φ wohldefiniert. Nach der Zwischenüberlegung 1.3.2 muß Φ injektiv sein. Um die Surjektivität zu erhalten, betrachten wir $M \in \mathrm{Max}\,B$ und stellen fest, daß $\phi^{-1}M \in \mathfrak{I}(A)$ und $\phi^{-1}M \supseteq \phi^{-1}\{0\} = \mathrm{Kern}\,\phi$ gilt. Ist $I \supset \phi^{-1}M$ ein echt größeres Ideal in A, so ist $\phi I \supset \phi\phi^{-1}M = M$ und damit $\phi I = B$, woraus $I = A$ folgt. Somit ist $\phi^{-1}M \in \mathfrak{M}(\mathrm{Kern}\,\phi)$ und Φ surjektiv. Zum Beweis der Stetigkeit betrachten wir eine beliebige, abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}_B(I) \subseteq \mathrm{Max}\,B$. Es ist

$$\Phi^{-1}\,\mathfrak{M}_B(I) = \{\ \phi^{-1}M \mid M \supseteq I\ \} = \{\ \phi^{-1}M \mid \phi^{-1}M \supseteq \phi^{-1}I\ \} = \mathfrak{M}_A(\phi^{-1}I).$$

Also ist Φ stetig. Die Stetigkeit von Φ^{-1} ersehen wir analog:

$$\Phi\,\mathfrak{M}_A(I) = \{\ \phi M \mid M \supseteq I\ \} = \{\ \phi M \mid \phi M \supseteq \phi I\ \} = \mathfrak{M}_B(\phi I).$$

□

Als direkte Folgerung erhalten wir

Satz 1.3.3. *Es sei* $A \in \mathrm{Alg}$*,* $I \subseteq A$ *ein Ideal. Dann ist* $\mathrm{Max}(A/I)$ *homöomorph zu* $\mathfrak{M}(I)$*.*

Beweis. Betrachte die Einbettung $\phi : A \to A/I : x \mapsto x \oplus I$. Dann ist $\mathrm{Max}(A/I) = \mathrm{Max}\,\phi(A)$ homöomorph zu $\mathfrak{M}(\mathrm{Kern}\,\phi) = \mathfrak{M}(I)$. □

Insbesondere erhalten wir aus dem Homomorphiesatz, nach dem für jeden Algebra-Homomorphismus $\phi : A \to B$ $A/\,\mathrm{Kern}\,\phi$ isomorph zu $\phi(A)$ ist: $\mathrm{Max}(A/\,\mathrm{Kern}\,\phi)$ ist homöomorph zu $\mathfrak{M}(\mathrm{Kern}\,\phi)$. Und ganz speziell den folgenden Satz.

Satz 1.3.4. *Es sei X ein vollständig regulärer, topologischer Raum, $A \in \mathrm{Alg}\,C(X)$, $D \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren* Kern D *als die Menge der Funktionen aus A, die auf D verschwinden und $A|_D := \{f|_D \mid f \in A\}$ als die Menge der Einschränkungen. Dann sind die folgenden Räume homöomorph*

$$\mathrm{Max}(A|_D) \simeq \mathrm{Max}(A/\,\mathrm{Kern}\,D) \simeq \mathfrak{M}(\mathrm{Kern}\,D) = \overline{\mu_A(D)}.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Überlegungen, in dem man den Einschränkungs-Homomorphismus $\phi : A \to A|_D : f \mapsto f|_D$ betrachtet.
Wir haben also zusammenfassend erhalten, daß sich der Strukturraum der Menge aller Einschränkungen $A|_D$ einer Algebra A in die Kompaktifizierung $\mathrm{Max}\,A$ einbettet. Wir erhalten daraus ein hinreichendes Kriterium für die Eins-zu-Eins-Abbildbarkeit eines Strukturraums mit der Stone-Čech-Kompaktifizierung:

Satz 1.3.5. *Es sei X ein unendlicher, diskreter, topologischer Raum und $A \in \mathrm{Alg}\,C(X)$. Es gebe eine Menge $D \subseteq X$, deren Mächtigkeit gleich der von X ist, so daß jede beschränkte Funktion $f \in C_B(D)$ sich zu einem Element von A fortsetzen läßt.*
Dann haben $\mathrm{Max}(A)$ *und βX die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Da X diskret ist, ist die Mächtigkeit der Stone-Čech-Kompaktifizierung $|\beta X| = 2^{2^{|X|}}$ (s. [W]) also die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Nun ist $\mathrm{Max}\,A \subseteq \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(C(X))$, woraus über die Mächtigkeit folgt:

$$|\,\mathrm{Max}\,A| \leq 2^{|C(X)|} \leq 2^{|\mathbb{C}^X|} = 2^{c^{|X|}} = 2^{2^{\aleph_0 \cdot |X|}} = 2^{2^{|X|}} = |\beta X|.$$

Andererseits enthält $A|_D \supseteq C_B(D)$, wodurch der Strukturraum nach Satz 1.0.7 $\mathrm{Max}(A|_D)$ äquivalent zur Stone-Čech-Kompaktifizierung βD wird. Also gilt:

$$|\,\mathrm{Max}\,A| \geq |\,\mathfrak{M}_A(\mathrm{Kern}\,D)| = |\,\mathrm{Max}(A/\,\mathrm{Kern}\,D)| = |\,\mathrm{Max}(A|_D)| = |\beta D| = |\beta X|.$$

□

§ 4 Stetige Fortsetzung und Äquivalenzkriterien

Wir wollen im folgenden untersuchen, unter welchen Bedingungen die Strukturräume zweier Algebren äquivalente Kompaktifizierungen induzieren. Das Ergebnis wird eine verallgemeinerung des Satzes 1.0.6 sein.

Definition 1.4.1. Es seien $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ reguläre Algebren. Dann heißen A und B strukturäquivalent, falls die assoziierten Kompaktifizierungen $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ und $(\operatorname{Max} B, \mu_B)$ (s. Satz 1.0.4) äquivalent sind. Das heißt, falls es einen Homöomorphismus $\Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B$ gibt, so daß $\Phi \circ \mu_A = \mu_B$ ist.
Zwei beliebige Algebren $A, B \in \operatorname{Alg}$ heißen strukturisometrisch, wenn ihre assoziierten Strukturräume $\operatorname{Max} A$ und $\operatorname{Max} B$ homöomorph sind.

Wir benötigen zunächst noch einen Fortsetzungssatz für Einbettungen in Strukturräume.

Satz 1.4.2. *Es sei $A, S \in \operatorname{Alg} C(X)$, $A \subseteq S$, A regulär über X habe* Hausdorff-*Struktur. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\Gamma_A^S : \operatorname{Max} S \to \operatorname{Max} A$, die der Bedingung $\Gamma_A^S \circ \mu_S = \mu_A$ genügt.*
Für diese gilt: Γ_A^S ist surjektiv, $\Gamma_A^S(M) \supseteq M \cap A$ für alle $M \in \operatorname{Max} S$ und

$$\Gamma_A^S(M) = \{f \in A \mid 1 \notin M \oplus f \odot A\}.$$

Beweis. Es sei $M \in \operatorname{Max} S$ beliebig. Dann ist $M \cap A$ ein Primideal in A. Da $\operatorname{Max} A$ ein Hausdorff-Raum ist, gibt es nach Satz 1.2.1 genau ein maximales Ideal $\Gamma_A^S(M) \in \mathfrak{M}_A(M \cap A)$. Wir erhalten somit eine Abbildung $\Gamma_A^S : \operatorname{Max} S \to \operatorname{Max} A$. Für alle $x \in X$ ist

$$(\Gamma_A^S \circ \mu_S)(x) = \Gamma_A^S(\operatorname{Kern}_S x) \supseteq \operatorname{Kern}_S(x) \cap A = \operatorname{Kern}_A(x).$$

Da $\operatorname{Kern}_A(x) \in \operatorname{Max} A$ ist, muß $\Gamma_A^S \circ \mu_S = \mu_A$ sein.
Um die Stetigkeit von Γ_A^S zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges, universelles Netz $(M_\delta)_{\delta \in D}$, das in $\operatorname{Max} S$ gegen $M \in \operatorname{Max} S$ konvergiert. Nach Lemma 1.1.1 (1.6) muß dann gelten

$$P := \overline{\lim_{\delta \in D}} M_\delta \cap A = A \cap \overline{\lim_{\delta \in D}} M_\delta \subseteq A \cap M \subseteq \Gamma_A^S M.$$

Auf der anderen Seite ist aber $(\Gamma_A^S M_\delta)_{\delta \in D}$ als Bild eines universellen Netzes selbst universell und somit konvergent gegen genau ein $M' \in \operatorname{Max} A$, da $\operatorname{Max} A$ ein kompakter

Hausdorff-Raum ist. Also ist

$$P = \overline{\lim_{\delta\in D}} M_\delta \cap A \subseteq \overline{\lim_{\delta\in D}} \Gamma_A^S M_\delta \subseteq M'.$$

Nun ist aber auch $(M_\delta)_{\delta\in D}$ universell, wodurch P zu einem Primideal in A wird, und nach Satz 1.2.1 $M' = \Gamma_A^S M$ sein muß. Somit ist Γ_A^S stetig.
Um die Surjektivität zu erkennen, geben wir uns ein $M \in \operatorname{Max} A$ vor. Dann gibt es ein universelles Netz $(x_\delta)_{\delta\in D}$ in X, so daß $\mu_A x_\delta$ in $\operatorname{Max} A$ gegen M konvergiert. Da $(x_\delta)_{\delta\in D}$ universell ist, muß aber auch $\mu_S x_\delta$ gegen ein $M' \in \operatorname{Max} S$ konvergieren. Da Γ_A^S stetig ist und $\operatorname{Max} A$ ein Hausdorff-Raum, folgt $\Gamma_A^S M' = M$.
Die explizite Darstellung von Γ_A^S gilt nach Satz 1.2.1, da für alle $M \in \operatorname{Max} S$, $M \cap A$ ein Primideal in A ist. □

Wir wollen nun untersuchen, wann zwei Strukturräume äquivalent sind. Da der Satz 1.0.6 die Äquivalenz mit Stone-Čech-Kompaktifizierung mit der Normalität der zugrunde liegenden Algebra in Verbindung brachte, liegt es nahe, daß die Äquivalenz der Kompaktifizierungen mit der Trennbarkeit von Mengen zusammenhängt.

Definition 1.4.3. Es sei $A \in \operatorname{Alg} C(X)$, dann definieren wir die Menge aller trennbaren Paare

$$A : X := \{(P, Q) \mid P, Q \subseteq X \ : \ \text{es gibt ein } f \in A \text{ so daß } \ f|_P = 0 \ \text{ und } \ f|_Q = 1 \ \}.$$

Beim Beweis des Satzes 1.0.6 in [Z] haben wir bereits das folgende gesehen:

Lemma 1.4.4. *Es sei $A \in \operatorname{Alg} C(X)$. Dann ist*

$$A : X = \{(P, Q) \in (\mathcal{P}(X))^2 \ : \ \overline{\mu_A P} \cap \overline{\mu_A Q} = \emptyset \ \}.$$

Da es von besonderer Wichtigkeit ist, daß diese Aussage auch ohne die Hausdorff-Eigenschaft der Räume $\operatorname{Max} A, \operatorname{Max} B$ richtig bleibt, wollen wir den Beweis hier nochmals kurz anführen.

Beweis. Es sei $(P, Q) \in A : X$. Dann gibt es ein $f \in A$, so daß $f|_P = 0$ und $f|_Q = 1$. Also ist

$$f \in \operatorname{Kern} P := \bigcap_{p\in P} \operatorname{Kern} p = \{g \in A \ : \ g|_P = 0\} \ \text{ und } \ 1 - f \in \operatorname{Kern} Q.$$

Dann ist $1 = f + (1 - f) \in \operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Kern} Q$ und damit $\operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Kern} Q = A$. Daraus folgt

$$\overline{\mu_A P} \cap \overline{\mu_A Q} = \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} P) \cap \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} Q)$$

$$= \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Kern} Q) = \mathfrak{M}(A) = \emptyset.$$

Entsprechend gilt umgekehrt für

$$\emptyset = \overline{\mu_A P} \cap \overline{\mu_A Q} = \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} P) \cap \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} Q) = \mathfrak{M}(\operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Kern} Q),$$

daß $\operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Kern} Q = A$ ist. Folglich gibt es ein $f \in \operatorname{Kern} P$ mit $1 - f \in \operatorname{Kern} Q$, woraus $(P, Q) \in A : X$ folgt. □

Wir erhalten daraus nun das folgende Kriterium:

Lemma 1.4.5. *Es seien $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$, beide regulär über X und strukturäquivalent. Dann ist $A : X = B : X$.*

Beweis. Es seien $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ und $(\operatorname{Max} B, \mu_B)$ äquivalent mit dem Homöomorphismus $\Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B$ und $(P, Q) \in A : X$. Dann ist $\emptyset = \overline{\mu_A P} \cap \overline{\mu_A Q}$ und damit

$$\overline{\mu_B P} \cap \overline{\mu_B Q} = \overline{\Phi(\mu_A P)} \cap \overline{\Phi(\mu_A Q)} = \Phi(\overline{\mu_A(P)} \cap \overline{\mu_A(Q)}) = \emptyset.$$

Somit ist $(P, Q) \in B : X$, und die Behauptung folgt aus der Symmetrie der Voraussetzung in A und B. □

Wir beachten nochmals, daß für das soeben bewiesene Kriterium die HAUSDORFF-Eigenschaft der Räume $\operatorname{Max} A, \operatorname{Max} B$ nicht benötigt wurde. Um die Umkehrung dieses Lemmas, welche jedoch nicht ohne die HAUSDORFF-Eigenschaft auskommen wird, beweisen zu können, bedarf es weiterer Vorbereitungen. Wir bezeichnen im folgenden kurz $S = C(X)$ und $\Gamma_A = \Gamma_A^S$ aus Satz 1.4.2.

Lemma 1.4.6. *Es seien $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$, beide regulär über X und beide von HAUSDORFF-Struktur, $A : X \subseteq B : X$ und $M_0, M_1 \in \operatorname{Max} C(X)$. Dann gilt die folgende Implikation:*

$$\Gamma_A M_0 \neq \Gamma_A M_1 \implies \Gamma_B M_0 \neq \Gamma_B M_1.$$

Beweis. Es sei $\Gamma_A M_0 \neq \Gamma_A M_1$. Da $\operatorname{Max} A$ ein kompakter HAUSDORFF-Raum ist, gibt es disjunkte, abgeschlossene Umgebungen U_j von $\Gamma_A M_j$ in $\operatorname{Max} A$. Nach Lemma 1.4.4 ist dann $(\mu_A^{-1}U_0, \mu_A^{-1}U_1) \in A : X \subseteq B : X$. Das heißt, es gibt ein $f \in B$, so daß $f|_{\mu_A^{-1}U_j} = j$ für $j \in \{0,1\}$. Betrachten wir zwei Netze $(x_\delta^j)_{\delta \in D}$ in X, so daß $\mu_S x_\delta^j \to M_j$. Dann ist $\mu_A x_\delta^j = \Gamma_A(\mu_S x_\delta^j) \to \Gamma_A M_j$, da Γ_A stetig ist. Folglich ist $\mu_A x_\delta^j \in U_j$, daher $x_\delta^j \in \mu_A^{-1} U_j$ und damit $f(x_\delta^j) = j$, schließlich.
Auf der anderen Seite ist $\mu_B x_\delta^j = \Gamma_B(\mu_S x_\delta^j) \to \Gamma_B M_j$. Nach Lemma 1.1.1 (1.6) heißt dies aber

$$f \in \overline{\lim_{\delta \in D}} \mu_B x_\delta^0 \subseteq \Gamma_B M_0 \quad \text{und} \quad 1 - f \in \overline{\lim_{\delta \in D}} \mu_B x_\delta^1 \subseteq \Gamma_B M_1.$$

Wäre $\Gamma_B M_0 = \Gamma_B M_1$, so müsste dieses maximale Ideal sowohl f als auch $1 - f$ enthalten, und somit auch das Eins-Element, was nicht sein kann. Also ist $\Gamma_B M_0 \neq \Gamma_B M_1$. □

Wir sind nun im Stande genau zu klären, wann zwei Strukturräume äquivalent sind.

Satz 1.4.7 (Äquivalenz-Kriterium)**.** *Zwei reguläre Algebren $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ mit* HAUSDORFF*-Struktur sind genau dann strukturäquivalent, wenn $A : X = B : X$ ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung $A : X = B : X$ haben wir bereits in Lemma 1.4.5 gezeigt.
Es sei also $A : X = B : X$. Nach Lemma 1.4.6 ist für alle $M_0, M_1 \in \operatorname{Max} S$: $\Gamma_A M_0 = \Gamma_A M_1$ genau dann, wenn $\Gamma_B M_0 = \Gamma_B M_1$ ist. Und nach Satz 1.4.2 wissen wir, daß Γ_A und Γ_B beide surjektiv sind. Also ist die Abbildung

$$\Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B : \ \Phi := \Gamma_B \circ \Gamma_A^{-1}$$

wohldefiniert, injektiv und surjektiv. Außerdem gilt für alle $x \in X$:

$$\Phi \circ \mu_A(x) = \Phi(\operatorname{Kern}_A(x)) = \Gamma_B \circ \Gamma_A^{-1}(\operatorname{Kern}_A(x))$$

$$= \Gamma_B(\operatorname{Kern}_S(x)) = \operatorname{Kern}_B(x) = \mu_B(x).$$

Es bleibt also lediglich zu zeigen, daß Φ stetig ist. Die Stetigkeit der Umkehrfunktion folgt dann aus der Symmetrie der Voraussetzung.
Wir betrachten dazu ein konvergentes Netz $(M_\delta)_{\delta \in D}$ in $\operatorname{Max} A$ mit Grenzwert $M \in \operatorname{Max} A$. Nach dem Auswahlaxiom können wir zu jedem M_δ ein Urbild $N_\delta \in \Gamma_A^{-1} M_\delta \subseteq \operatorname{Max} S$

wählen. Da $\operatorname{Max} S$ kompakt ist, gibt es zu jedem Subnetz $(N_{\sigma\delta})_{\delta\in D'}$ ein konvergentes Sub-Sub-Netz $(N_{\sigma\tau\delta})_{\delta\in D''}$ mit einem Grenzwert $N \in \operatorname{Max} S$. Da Γ_A und Γ_B stetig sind, folgt:

$$\Gamma_A N \leftarrow \Gamma_A N_{\sigma\tau\delta} = M_{\sigma\tau\delta} \to M \quad \text{und} \quad \Gamma_B N_{\sigma\tau\delta} \to \Gamma_B N.$$

Damit ist $N \in \Gamma_A^{-1}\{M\}$. Da somit der Grenzwert aller Sub-Sub-Netze $(\Gamma_B N_{\sigma\tau\delta})_{\delta\in D''}$ identisch ist, folgt

$$\Phi M_\delta = \Gamma_B N_\delta \to \Gamma_B N = \Phi M.$$

□

§ 5 Strukturisometrie-Kriterien

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt ein Kriterium für die Strukturäquivalenz hergeleitet. Doch wir interessieren uns vor allem für die schwächere Eigenschaft der Strukturisometrie, da nur diese notwendig für die Isomorphie zweier Algebren ist. In [Z] haben wir bereits gesehen, daß in einem Spezialfall die beiden Begriffe übereinstimmen, nämlich bei der Stone-Čech-Kompaktifizierung eines diskreten Raumes. Wir wollen nun untersuchen, ob wir diese Aussage verallgemeinern können. Wir erinnern uns an das folgende Lemma aus [Z, S. 36]

Lemma 1.5.1. *Es sei X ein diskreter, topologischer Raum und (K,κ) eine T1-Kompaktifizierung von X. Eine einelementige Menge $\{p\} \subseteq K$ ist genau dann offen, wenn $p \in \kappa(X)$ ist.*

Da für jede reguläre Algebra $A \in \operatorname{Alg} C(X)$ $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ nach Satz 1.0.4 eine T1-Kompaktifizierung ist, gilt diese Aussage für jeden Strukturraum. Insbesondere ist μ_A eine offene Abbildung.

Korollar 1.5.2. *Es sei X ein diskreter, topologischer Raum und $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ reguläre Algebren. Es gebe einen Homöomorphismus $\Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B$. Dann gibt es eine Permutation $\phi \in C(X,X)$, so daß $\Phi \circ \mu_A = \mu_B \circ \phi$ ist.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\Phi \circ \mu_A : X \to \operatorname{Max} B$. Da $\mu_A(X)$ alle Elemente enthält, deren Einpunktmenge offen ist, gilt dies auch für $\Phi \circ \mu_A$. Das selbe ist für $\mu_B(X)$

richtig. Somit ist $\mu_B(X) = (\Phi \circ \mu_A)(X)$. Die Funktion $\phi := \mu_B^{-1} \circ \Phi \circ \mu_A : X \to X$ ist damit wohldefiniert und bijektiv, also eine Permutation. Und es ist

$$\mu_B \circ \phi = \mu_B \circ \mu_B^{-1} \circ \Phi \circ \mu_A = \Phi \circ \mu_A.$$

□

Beispiel 1.5.3. Es sei $A \in \operatorname{Alg} C(X)$ eine reguläre Algebra über dem diskreten, topologischen Raum X und $\phi \in C(X, X)$ eine Permutation. Wir definieren

$$A^\phi := \{\ f \circ \phi \mid f \in A\ \}.$$

Offenbar ist die Abbildung $T_\phi : A \to A^\phi : T_\phi(f) := f \circ \phi$ ein Algebra-Isomorphismus. Damit sind die beiden Algebren nach Satz 1.3.1 strukturisometrisch, jedoch im allgemeinen nicht strukturäquivalent. Wir erhalten den Homöomorphismus der Strukturräume, den wir ebenfalls mit T_ϕ bezeichnen wollen, als

$$T_\phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} A^\phi : T_\phi(M) = \{f \circ \phi \mid f \in M\} \text{ für alle } M \in \operatorname{Max} A.$$

Betrachten wir nun noch die Menge der durch A^ϕ trennbaren Mengen, so ergibt sich für diese die folgende Bedingung: Es ist $(P, Q) \in A^\phi : X$ genau dann, wenn es ein $f \in A$ gibt, so daß $f \circ \phi|_P = 0$ und $f \circ \phi|_Q = 1$ ist. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit f trennt $\phi(P)$ von $\phi(Q)$. Das heißt $(\phi(P), \phi(Q)) \in A : X$. Wir definieren entsprechend

$$\phi(A : X) := \{(\phi(P), \phi(Q)) \mid (P, Q) \in A : X\ \}$$

und erhalten somit die Gleichung

$$A^\phi : X = \phi(A : X).$$

Satz 1.5.4. *Es sei X ein diskreter, topologischer Raum, $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ regulär. A und B sind genau dann strukturisometrisch, wenn es eine Permutation $\phi \in C(X, X)$ gibt, so daß A und B^ϕ strukturäquivalent sind.*

Beweis. Es sei $\Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B$ ein Homöomorphismus. Nach Korollar 1.5.2 gibt es eine Permutation $\phi : X \to X$ mit $\Phi \circ \mu_A = \mu_B \circ \phi$. Gemäß Beispiel 1.5.3 ist dann $T_\phi \circ \Phi : \operatorname{Max} A \to \operatorname{Max} B^\phi$ ein Homöomorphismus. Und es gilt für alle $x \in X$

$$\mu_{B^\phi}(x) = \{g \in B^\phi \mid g(x) = 0\} = \{f \circ \phi \mid f \in B \text{ und } f(\phi(x)) = 0\}$$

$$= T_\phi(\mu_B(\phi(x)) = (T_\phi \circ \Phi) \circ \mu_A(x).$$

Somit sind $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$ und $(\operatorname{Max} B^\phi, \mu_{B^\phi})$ äquivalent.
Die Umgekehrte Richtung folgt aus der Tatsache, daß A und B^ϕ strukturäquivalent und damit strukturisometrisch sind. B und B^ϕ sind nach Beispiel 1.5.3 ebenfalls strukturisometrisch. Also sind auch A und B strukturisometrisch. □

Kombinieren wir nun dieses Ergebnis mit den Äquivalenz-Kriterien 1.4.7 und 1.4.5 so erhalten wir das folgende Ergebnis.

Korollar 1.5.5. *Es sei X ein diskreter, topologischer Raum, $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ regulär und von* HAUSDORFF*-Struktur. A und B sind genau dann strukturisometrisch wenn es eine Permutation $\phi \in C(X, X)$ gibt, so daß $A : X = B^\phi : X$ ist.*
Sind A und B nicht von HAUSDORFF*-Struktur, aber regulär und strukturisometrisch, so ist die Existenz der Permutation ϕ mit $A : X = B^\phi : X$ immernoch notwendig.*

Nach Beispiel 1.5.3 ergibt sich daraus die folgende Erkenntnis.

Korollar 1.5.6. *Es sei X ein diskreter, topologischer Raum. Zwei reguläre Algebren $A, B \in \operatorname{Alg} C(X)$ mit* HAUSDORFF*-Struktur sind genau dann strukturisometrisch, wenn es eine Permutation $\phi \in C(X, X)$ gibt, so daß $A : X = \phi(B : X)$ ist.*
Besitzen beide Algebren keine HAUSDORFF*-Struktur, so ist die Existenz der Permutation ϕ mit $A : X = \phi(B : X)$ immernoch notwendig.*

Beweis. Es seien A und B strukturisometrisch. Dann gibt es nach Korollar 1.5.5 eine Permutation ϕ, so daß A und B^ϕ strukturäquivalent sind. Dies impliziert nach Lemma 1.4.5 $A : X = B^\phi : X$. Nach Beispiel 1.5.3 ist aber $B^\phi : X = \phi(B : X)$ und damit $A : X = \phi(B : X)$.
Sind umgekehrt A und B Algebren mit HAUSDORFF-Struktur, so daß es eine Permutation $\phi : X \to X$ mit $A : X = \phi(B : X)$ gibt, dann ist

$$B^\phi : X = \phi(B : X) = A : X$$

nach Beispiel 1.5.3. Somit sind A und B^ϕ nach 1.4.7 strukturäquivalent. Damit sind nach Korollar 1.5.5 A und B strukturisometrisch. □

§ 6 Strukturräume von Produktalgebren

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Struktur-Räume von Produktalgebren aus der direkten Summe der einzelnen Strukturräume zusammengesetzt sind. Diese Eigenschaft werden wir später benötigen, um den Strukturraum von Funktionenräumen mehrfach zusammenhängender Gebiete anzugeben.

Satz 1.6.1. *Es seien* $A, B \in \mathrm{Alg}$. *Dann ist* $\mathrm{Max}(A \times B)$ *homöomorph zu* $\mathrm{Max}\, A \uplus \mathrm{Max}\, B$, *wobei wir mit* $\mathrm{Max}\, A \uplus \mathrm{Max}\, B$ *die disjunkte Vereinigung mit der üblichen Summentopologie meinen.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\phi_A : A \times B \to A : (f, g) \mapsto f$. Dann ist $\mathrm{Kern}\, \phi_A = \{0\} \times B$. Nach Lemma 1.3.1 ist dann $\mathfrak{M}_{A \times B}(\{0\} \times B)$ homöomorph zu $\mathrm{Max}\, \phi(A \times B) = \mathrm{Max}\, A$ und analog $\mathfrak{M}_{A \times B}(A \times \{0\})$ homöomorph zu $\mathrm{Max}\, B$. Da aber

$$\mathfrak{M}(A \times \{0\}) \cap \mathfrak{M}(\{0\} \times B) = \mathfrak{M}((A \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times B)) = \mathfrak{M}(A \times B) = \emptyset$$

ist, sind beide Teile disjunkt. Außerdem überdecken sie den ganzen Raum, da

$$\mathfrak{M}(A \times \{0\}) \cup \mathfrak{M}(\{0\} \times B) = \mathfrak{M}((A \times \{0\}) \odot (\{0\} \times B)) = \mathfrak{M}(\{0\}) = \mathrm{Max}(A \times B).$$

Da sowohl $A \times \{0\}$ als auch $\{0\} \times B$ Ideale in $A \times B$ sind, sind $\mathfrak{M}(A \times \{0\})$ und $\mathfrak{M}(\{0\} \times B)$ beide offen und abgeschlossen. Also ist $\mathrm{Max}(A \times B)$ homöomorph zu der disjunkten Vereinigung $\mathrm{Max}\, A \uplus \mathrm{Max}\, B$. □

Durch vollständige Induktion erhält man das folgende Ergebnis.

Korollar 1.6.2. *Es sei* $A \in \mathrm{Alg}$ *und* $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $\mathrm{Max}(A^n)$ *homöomorph zu* $\mathbb{Z}_n \times \mathrm{Max}\, A$.

Kapitel II

Anwendung auf Hadamard-Algebren

In diesem Kapitel wollen wir die zunächst abstrakten Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels auf die für uns interessanten HADAMARD-Algebren anwenden. Wir werden einerseits die Möglichkeit für Strukturisometrien und damit die Ring-Isomorphien unter HADAMARD-Algebren drastisch einschränken können. Zum anderen werden wir aber sehen, daß die Mächtigkeit der Strukturräume aller HADAMARD-Algebren identisch ist.

§ 1 Strukturäquivalenz von Hadamard-Algebren

RENDER UND SAUER haben in [RS2] und [RS3] nachgewiesen, daß keine zwei unterschiedlichen HADAMARD-Algebren Algebra-isomorph zueinander sein können. Wir haben in Satz 1.3.1 gesehen, daß zwei isomorphe Algebren stets strukturisometrisch sind, wobei bereits die Ring-Isomorphie hinreichend ist. Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen falsch.

Definition 2.1.1. Wir identifizieren eine HADAMARD-Algebra $H(G)$ mit dem Raum der zugehörigen Taylor-Koeffizienten $\widehat{H}(G)$, so daß wir (per Definition) äquivalente Kompaktifizierungen $(\operatorname{Max} H(G), \mu_G)$ und $(\operatorname{Max} \widehat{H}(G), \mu_{\widehat{H}(G)})$ erhalten, wobei wir $\mu_G(n) := \{f \in H(G) \mid \widehat{f}(n) = 0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren.
Zwei HADAMARD-Algebren $H(P)$ und $H(Q)$ heißen strukturäquivalent, wenn $(\operatorname{Max} H(P), \mu_P)$ und $(\operatorname{Max} H(Q), \mu_Q)$ äquivalente Kompaktifizierungen von $\mathbb{N}_0$ sind, und damit genau dann, wenn $\widehat{H}(P)$ und $\widehat{H}(Q)$ strukturäquivalent sind.

Durch Satz 1.4.7 wissen wir, daß zwei Algebren mit HAUSDORFF-Struktur genau dann strukturäquivalent sind, wenn sie die gleichen Mengen trennen. Nach Lemma 1.4.5 ist diese Bedingung auch dann notwendig, wenn die HAUSDORFF-Eigenschaft nicht erfüllt ist. Diesbezüglich wissen wir über die HADAMARD-Algebren bisher nur, daß $H(\mathbb{D})$ HAUSDORFF-Struktur besitzt. Wir werden im folgenden jedoch sehen, daß die Menge der erlaubten Singularitäten am Rande des Einheitskreises für die Strukturäquivalenz eine entscheidende Rolle spielt.

Satz 2.1.2. *Es seien $H(P)$ und $H(Q)$ strukturäquivalente* HADAMARD-*Algebren. Dann ist $P \cap \partial\mathbb{D} = Q \cap \partial\mathbb{D}$.*

Beweis. Mit $H(P)$ und $H(Q)$ sind auch $\widehat{H}(P)$ und $\widehat{H}(Q)$ strukturäquivalent. Nach Lemma 1.4.5 ist daher $\widehat{H}(P) : \mathbb{N}_0 = \widehat{H}(Q) : \mathbb{N}_0$.
Da P und Q zulässige Gebiete sind, sind ihre Komplemente multiplikativ abgeschlossen und damit auch $P^* := P^c \cap \partial\mathbb{D}$ und $Q^* = Q^c \cap \partial\mathbb{D}$. Somit ist P^* eine zyklische Gruppe von endlicher Ordnung $\kappa(P)$ oder $P^* = \partial\mathbb{D}$. In letzterem Fall ist $P = \mathbb{D}$. Und wir wissen bereits nach Satz 1.0.8, daß $\operatorname{Max} H(\mathbb{D})$ mit $\operatorname{Max} H(Q)$ nur dann homöomorph sein können, wenn $Q = \mathbb{D}$ ist.
Im ersten Fall ist $p(z) = \frac{1}{1-z^{\kappa(P)}} \in H(P)$. Es ist $\widehat{p}(n) = 1_{\kappa(P)\cdot\mathbb{N}_0}(n)$. $\widehat{p}$ trennt also die Menge $Z_P := \kappa(P)\cdot\mathbb{N}_0$ von ihrem Complement. Daraus folgt $(Z_P, Z_P^c) \in \widehat{H}(P) : \mathbb{N}_0 = \widehat{H}(Q) : \mathbb{N}_0$. Also sind die $\kappa(P)$-ten Einheitswurzeln auch in Q^c enthalten. Es folgt $P^c \cap \partial\mathbb{D} \subseteq Q^c \cap \partial\mathbb{D}$. Die Symmetrie in P und Q ergibt die umgekehrte Inklusion. □

Wenn wir also nach einem Beispiel für zwei HADAMARD-Algebren suchen, welche zwar nicht isomorph aber doch wenigstens strukturäquivalent sind, so dürfen diese sich am Rande des Einheitskreises nicht unterscheiden. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die Gestalt des Gebietes außerhalb einer Umgebung des Einheitskreises keinerlei Effekt auf den Strukturraum $\operatorname{Max} H(G)$ ausübt. Wir können aber auch ein Beispiel angeben, bei dem zwei HADAMARD-Algebren sich durchaus in der Nähe des Einheitskreises unterscheiden können und diese trotzdem strukturäquivalent sind. Wir beachten dazu, daß in Satz 1.3.1 bereits die Ring-Isomorphie zweier Algebren hinreichend für die Strukturisomorphie ist.

Beispiel 2.1.3. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein zulässiges Gebiet mit $G^* := \{\overline{z} \mid z \in G\} \neq G$. Dann sind $H(G)$ und $H(G^*)$ strukturäquivalent.

Dies ersehen wir sofort aus folgender Verallgemeinerung

Lemma 2.1.4. *Es sei $A \in \operatorname{Alg} C(X)$ regulär über X und $A^* = \{f^* \mid f \in A\}$, wobei $f^*(x) = \overline{f(x)}$ für alle $x \in X$ das komplex konjugierte Element darstellt. Dann sind A und A^* strukturäquivalent.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\phi : A \to A^* : f \mapsto f^*$. Offenbar ist ϕ ein selbstinverser Ring-Isomorphismus zwischen A und A^*. Somit gilt nach Satz 1.3.1

$$\operatorname{Max} A^* = \operatorname{Max} \phi(A) \simeq \mathfrak{M}_A(\operatorname{Kern} \phi) = \mathfrak{M}_A(\{0\}) = \operatorname{Max} A.$$

Dabei meinen wir mit $X \simeq Y$, X und Y sind homöomorphe, topologische Räume. Wir betrachten des weiteren das Bild der Einbettung

$$(\phi \circ \mu_A)(x) = \phi(\{f \in A \mid \widehat{f}(x) = 0\}) = \{f^* \in A^* \mid \widehat{f^*}(x) = 0\} = \mu_{A^*}(x).$$

Damit ist $(\operatorname{Max} A^*, \mu_{A^*})$ äquivalent zu $(\operatorname{Max} A, \mu_A)$. □

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Bedingung des Satzes 2.1.2 auch notwendig für die Strukturisometrie zweier HADAMARD-Algebren ist.

Satz 2.1.5. *Es seien $H(P)$ und $H(Q)$ strukturisometrische* HADAMARD-*Algebren. Dann ist $P \cap \partial\mathbb{D} = Q \cap \partial\mathbb{D}$.*

Beweis. Nach Korollar 1.5.6 folgt aus der Strukturisometrie von $\widehat{H}(P)$ und $\widehat{H}(Q)$ die Existenz einer Permutation $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so daß $\widehat{H}(P) : \mathbb{N}_0 = \phi(\widehat{H}(Q) : \mathbb{N}_0)$ ist. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{S}(P) := \{S \subseteq \mathbb{N}_0 \mid (S, S^c) \in H(P) : \mathbb{N}_0\ \}.$$

Dann ist $S \in \mathfrak{S}(P)$ genau dann, wenn

$$F_S(z) := \sum_{n \in S} z^n \in H(P).$$

Wir definieren die ϕ-Transformierte einer in 0 holomorphen Funktion durch

$$f^\phi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{f} \circ \phi^{-1})(n)\ z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\ z^{\phi(n)}.$$

Offenbar ist dann $S \in \phi(\mathfrak{S}(Q))$ genau dann, wenn

$$F_S^\phi(z) = \sum_{n \in \phi^{-1}(S)} z^n = \sum_{n \in S} z^{\phi(n)} \in H(Q).$$

Wir beachten, daß beide Funktionen Potenzreihenentwicklungen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten besitzen, nämlich $\{0,1\}$. Wir finden dazu eine Charakterisierung im Buch von BIEBERBACH [Bi, S.115ff].

Satz 2.1.6 (Satz von SZEGÖ). *Es sei $G \supsetneqq \mathbb{D}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$ mit $|\widehat{f}(\mathbb{N}_0)| < \infty$. Dann ist f rational, $\widehat{f}$ schließlich periodisch, und es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und ein Polynom p, so daß*

$$f(z) = \frac{p(z)}{1 - z^m}.$$

Die Singularitäten liegen in diesem Fall ausschließlich bei den m-ten Einheitswurzeln e_m^k $(k \in \mathbb{Z}_m)$.

Betrachten wir die Anzahl der singulären Punkte von P am Rande des Einheitskreises und bezeichnen diese mit $\kappa(P)$. So ist

$$P^c \cap \partial\mathbb{D} = \{\ e_{\kappa(P)}^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\kappa(P)}\ \}.$$

Jede rationale Funktion mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten muß entsprechend schließlich $\kappa(P)$-periodische TAYLOR-Koeffizienten $\widehat{f}(n)$ besitzen. Selbiges gilt für das Gebiet Q. Insbesondere ist somit jede Menge $S \in \mathfrak{S}(P)$ schließlich $\kappa(P)$-periodisch und $\phi(S) \in \mathfrak{S}(Q)$ schließlich $\kappa(Q)$-periodisch.

Um die Einschränkung auf schließlich alle Elemente zu eliminieren, teilen wir die Elemente von $\mathfrak{S}(P)$ in Klassen ein. Wir betrachten die Äquivalenz-Relation auf $\mathfrak{S}(P)$ definiert durch $S \sim T$ genau dann, wenn die symmetrische Differenz $S \triangle T$ eine Menge von endlicher Mächtigkeit ist. Offenbar bildet jede Permutation $\phi : X \to X$ Äquivalenz-Klassen auf Äquivalenzklassen ab, denn ist $S \sim T$ eine endliche Menge, so ist $\phi(S) \triangle \phi(T) = \phi(S \triangle T)$ ebenfalls eine endliche Menge. Somit ist $S \sim T$ genau dann, wenn $\phi(S) \sim \phi(T)$ ist.

Da jedes Element aus $\mathfrak{S}(P)$ schließlich periodisch ist, können wir diese Menge durch Abänderung in endlich vielen Punkten zu einer überall periodischen Menge abändern. Diese bleibt somit in der gleichen Klasse, wie die ursprüngliche Menge. Die sich daraus

ergebende Abbildung ist eindeutig, da in jeder Äquivalenzklasse nur eine überall periodische Menge liegen kann, denn zwei unterschiedliche, periodische Mengen besitzen eine periodische, symmetrische Differenz, die somit nicht endlich sein kann.
Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse einer Menge mit $[S]_\sim$ und den periodischen Repräsentanten mit $\mathfrak{p}([S]_\sim)$ oder $\mathfrak{p}(S)$. Die Menge der periodischen Elemente aus $\mathfrak{S}(P)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(P) = \mathfrak{p}(\mathfrak{S}(P))$.
Nach unseren vorangegangenen Überlegungen ist dann die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{P}(P) \to \mathfrak{P}(Q) : \Phi(S) = \mathfrak{p}(\phi(S))$$

eine bijektive Abbildung. Da alle Mengen in $\mathfrak{P}(P)$ $\kappa(P)$-periodisch sein müssen und Φ eine Bijektion ist, gilt für die Mächtigkeit der beiden Mengen

$$2^{\kappa(P)} = |\mathfrak{P}(P)| = |\mathfrak{P}(Q)| = 2^{\kappa(Q)}$$

und damit $\kappa(P) = \kappa(Q)$. Daraus erhalten wir $P^c \cap \partial\mathbb{D} = Q^c \cap \partial\mathbb{D}$ und damit die Behauptung. □

Da nach nach Satz 1.3.1 die Ring-Isomorphie hinreichend für die Strukturisometrie ist, erhalten wir das folgende Ergebnis.

Korollar 2.1.7. *Es seien $H(P)$ und $H(Q)$ Ring-isomorphe* HADAMARD-*Algebren. Dann ist $P \cap \partial\mathbb{D} = Q \cap \partial\mathbb{D}$.*

§ 2 Die Mächtigkeit der Räume $\operatorname{Max} H(G)$

Um das bereits bewiesene Kriterium 1.3.5 für die Mächtigkeit der Strukturräume auf die Räume $\operatorname{Max} H(G)$ anwenden zu können, betrachten wir die kleinste HADAMARD-Algebra holomorpher Funktionen $H_1 = H(\mathbb{C}_\infty \backslash \{1\})$. Wir wollen dabei die Eigenschaft $f(\infty) = 0$ in die Definition der Holomorphie im Punkt ∞ stets mit einschließen. Wir wissen bereits, daß H_1 isometrisch isomorph zum Raum E_0 der ganzen Funktionen vom Exponentialtyp 0 der Ordnung 1 ist (s. z.B. [Bi, S.8]), wobei wir zwei topologische Vektorräume genau dann als isometrisch isomorph bezeichnen wollen, wenn es einen Vektorraum-Isomorphismus gibt, der gleichzeitig ein Homöomorphismus ist. Wir untersuchen daher zunächst die Existenz von Funktionen mit vorgegeben Werten im Raum E_0. Hierzu benötigen wir das folgende, auch an sich interessante Lemma.

Lemma 2.2.1. *Es sei $f \in E_0$ vom Geschlecht 0 mit $f(0) = 1$ gegeben. Wir definieren*

$$f^+(z) := \prod_{n=0}^{\infty}(1 + \frac{z}{|z_n|}),$$

wobei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ alle Nullstellen von f durchläuft.
Dann ist die Menge

$$T(f) = \{g \in E_0 \mid g \text{ ist Teiler von } f \text{ und } g(0) = 1\}$$

normal (im MONTEL*schen Sinne) in E_0 und es gilt für alle $g \in T(f)$ und alle $\alpha > 0$:*

$$\|g\|_\alpha \leq \|f^+\|_\alpha.$$

Beweis. Wir bezeichnen, wie üblich, mit $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Es sei $g \in T(f)$. Dann gibt es eine Teilmenge $D \subset \mathbb{N}_0$, so daß gilt:

$$g(z) = \prod_{n\in D}(1 - \frac{z}{z_n}).$$

Daher ist

$$M(g,r) \leq \prod_{n\in D}(1 + \frac{r}{|z_n|}) \leq \prod_{n\in\mathbb{N}_0}(1 + \frac{r}{|z_n|}) = M(f^+, r).$$

Da für alle $h \in E_0$, $\|h\|_\alpha = \sup_{r>0} M(h,r) \cdot e^{-\alpha r}$ ist, folgt $\|g\|_\alpha \leq \|f^+\|_\alpha$. Also ist $T(f)$ beschränkt in E_0. Da E_0 isometrisch isomorph zu H_1 ist, und dort der Satz von MONTEL gilt, gilt dieser auch in E_0 und es ist $T(f)$ normal in E_0. □

Satz 2.2.2. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, die der Bedingung*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$$

genügt, und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren

$$h(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{z}{z_n}), \quad h_k(z) = \frac{h(z)}{1 - \frac{z}{z_k}}, \quad \hbar_k(z) = \frac{h_k(z)}{h_k(z_k)}.$$

$$\text{Dann ist } \sum_{k=0}^{\infty} w_k \hbar_k \text{ konvergent in } E_0.$$

Insbesondere existiert eine Funktion $f \in E_0$, so daß $f(z_k) = w_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis. Wir betrachten den Nenner der Funktionen $\hbar_k$:

$$|h_k(z_k)| = \prod_{n=0, n\neq k}^{\infty} |1 - \frac{z_k}{z_n}| = \prod_{n=0}^{k-1} |1 - \frac{z_k}{z_n}| \cdot \prod_{n=k+1}^{\infty} |1 - \frac{z_k}{z_n}| =: p_k \cdot r_k.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $q > 1$, so daß $|z_{n+1}| > q \cdot |z_n|$ schließlich gilt. Da $q > 1$ ist, gilt $q^N > 3$ schließlich und damit gelten beide Aussagen ab einem Index N_0. Es gilt somit:

$$p_k = \prod_{n=0}^{k-1} |\frac{z_k}{z_n} - 1| \geq \prod_{n=0}^{k-1} (\frac{|z_k|}{|z_n|} - 1) \geq \prod_{n=0}^{N_0-1} (\frac{|z_k|}{|z_n|} - 1) \cdot \prod_{n=N_0}^{k-1} (\frac{|z_k|}{|z_n|} - 1)$$

$$\geq c_0 \cdot \prod_{n=N_0}^{k-1} (q^{k-n} - 1) = c_0 \cdot \prod_{m=1}^{k-N_0} (q^m - 1) \geq c_1 \cdot \prod_{m=N_0}^{k-N_0} (q^m - 1)$$

$$\geq c_1 \cdot \prod_{m=N_0}^{k-N_0} (3 - 1) = c_1 \cdot 2^{k-2N_0} = c_2 \cdot 2^k.$$

Ebenso gilt ab dem Index N_0:

$$r_k = \prod_{n=k+1}^{\infty} |1 - \frac{z_k}{z_n}| \geq \prod_{n=k+1}^{\infty} (1 - \frac{|z_k|}{|z_n|})$$

$$\geq \prod_{n=k+1}^{\infty} |1 - q^{-(n-k)}| = \prod_{n=1}^{\infty} |1 - q^{-n}| = c_3 > 0.$$

Also gilt $|h_k(z_k)| > c_4 \cdot 2^k$ schließlich, und es folgt somit für alle $\alpha > 0$

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} \|w_k \cdot \hbar_k\|_\alpha \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |w_k| \cdot \frac{1}{c_3 \cdot 2^k} \|h_k\|_\alpha$$

$$\leq c_4 \cdot \|w\|_\infty \cdot \sum_{k=N_0}^{\infty} 2^{-k} \|h^+\|_\alpha \leq c_4 \cdot \|w\|_\infty \cdot \|h^+\|_\alpha < \infty.$$

Daß die Grenzfunktion f die Bedingung $f(z_k) = w_k$ erfüllt, wird durch die Eigenschaft $\hbar_k(z_n) = \delta_{n,k}$ offenbar. □

Wir erhalten daraus unmittelbar die gewünschte Normalität von E_0 für hinreichende dünne Mengen:

Korollar 2.2.3. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, die der Bedingung $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ genügt, und $D = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, dann ist $E_0|_D \supseteq C_B(D)$.*

Wir wissen, daß die Integraltransformation

$$\widehat{f}(z) := -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t-1|=\varepsilon} t^{-1-z} \cdot f(t)\, dt$$

die eindeutig bestimmte Fortsetzung der Folge der TAYLOR-Koeffizienten $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ der H_1-Funktion f in E_0 ist. Da $H_1 \subseteq H(G)$ für jedes zulässige Gebiet G ist, gilt daher das folgende

Lemma 2.2.4. *Es sei G ein beliebiges, zulässiges Gebiet, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die der Bedingung*

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{|n_{k+1}|}{|n_k|} > 1$$

genügt, und $D = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
Dann ist $\widehat{H}(G)|_D \supseteq C_B(D)$.

Und wir erhalten, nach Satz 1.3.5 das Ergebnis

Satz 2.2.5. *Der Strukturraum jeder* HADAMARD-*Algebra hat die gleiche Mächtigkeit wie $\beta\mathbb{N}_0$.*

Genauer betrachtet, stellen wir fest, daß die STONE-ČECH-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen sogar überabzählbar oft in $\operatorname{Max} H(G)$ homöomorph eingebettet liegt, obwohl $\operatorname{Max} H(G)$ nur im Falle des Einheitskreises homöomorph zu $\beta\mathbb{N}_0$ ist.

Kapitel III

Invertierbare Elemente und Isomorphien

In diesem Kapitel werden wir sehen, daß die Struktur der Räume Max $H(G)$ hauptsächlich durch Gestalt und Anzahl der Löcher des Gebietes am Rande des Einheitskreises bestimmt wird. Es stellt sich heraus, daß hingegen die Gestalt des Gebietes außerhalb keinen Einfluß auf die Strukturräume nimmt. Zudem beweisen wir, daß es, obwohl in [RS2] gezeigt wurde, daß keine zwei unterschiedlichen HADAMARD-Algebren isomorph zueinander sind, einige Isomorphien unter den HADAMARD-Algebren gibt.

§ 1 Potenzreihen von Taylor-Koeffizienten

Definition 3.1.1. Es sei G ein zulässiges Gebiet, $f \in H(G)$. Dann bezeichnen wir $f^{<0>} = \chi = \frac{1}{1-z}$ und definieren rekursiv $f^{<n+1>} = f * f^{<n>}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem HADAMARDschen Multiplikationssatz wissen wir, daß dann $f^{<n>} \in H(G)$ sein muß.

Im folgenden werden wir den Konvergenzradius der TAYLOR-Entwicklung einer Funktion um den Nullpunkt f mit $\rho(f)$ bezeichnen.
Wir werden nun einen Konvergenzsatz als Konsequenz des HADAMARDschen Multiplikationssatzes beweisen, der für die weiteren Überlegungen von fundamentaler Bedeutung ist.

Satz 3.1.2. *Es sei F holomorph in einer Nullumgebung, G ein zulässiges Gebiet, $f \in H(G)$ mit $\rho(f) > 1$ und $\|\widehat{f}\|_\infty < \rho(F)$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{F}(n) \cdot f^{<n>}$$

im Raum $H(G)$ (also lokal gleichmäßig) gegen eine Funktion $g \in H(G)$ mit $\widehat{g} = F \circ \widehat{f}$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung zunächst für den Spezialfall $G = \mathbb{D}$. Wir stellen fest, daß für alle $f \in H(\mathbb{D})$, die beschränkte Taylor-Koeffizienten $\widehat{f}(n)$ besitzen, das folgende gilt

$$M(f,r) = \max_{|z|\leq r} |f(z)| = \max_{|z|\leq r} |\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n|$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)| r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{f}\|_\infty r^n = \frac{1}{1-r} \cdot \|\widehat{f}\|_\infty.$$

Ist also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $H(\mathbb{D})$ mit $\widehat{f_k} \to \widehat{f}$ in l_∞, so konvergiert f_k gegen f in $H(\mathbb{D})$. Da F in der $\rho(F)$ Umgebung von 0 holomorph ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\widehat{F}(\widehat{k) \cdot f^{<k>}}\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{F}(k)| \cdot \|\widehat{f^{<k>}}\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{F}(k)| \cdot \|\widehat{f}\|_\infty^k < \infty,$$

da $\|\widehat{f}\|_\infty < \rho(F)$ ist. Somit konvergiert die Reihe in l_∞ und damit konvergiert

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{F}(k) f^{<k>} \in H(\mathbb{D}).$$

Und es gilt für die zugehörigen Taylor-Koeffizienten

$$\widehat{g}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{F}(k)(\widehat{f}(n))^k = F(\widehat{f}(n)).$$

Nun wollen wir uns von der Einschränkung $G = \mathbb{D}$ befreien. Wir betrachten ein beliebiges, zulässiges Gebiet G. Es sei K eine kompakte Teilmenge von G. Wir definieren $\rho(K) = \max\{|z| \mid z \in K\}$. Da $\rho(f) > 1$ ist, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß $\rho(f^{<N_0>}) \geq \rho(f)^{N_0} \geq \rho(K)$ gilt. Dann ist für alle $N > N_0$

$$\sum_{n=0}^{N} \widehat{F}(n) f^{<n>} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \widehat{F}(n) f^{<n>} + f^{<N_0>} * \sum_{n=0}^{N-N_0} \widehat{F}(n+N_0) f^{<n>}.$$

Dabei ist der erste Term nach dem Hadamardschen Multiplikationssatz in $H(G)$ enthalten, $\rho(f^{<N_0>}) \geq \rho(K)$ und es konvergiert die letzte Summe in $H(\mathbb{D})$ nach dem soeben bewiesenen Spezialfall. Damit konvergiert der gesamte hintere Summand nach dem

HADAMARDschen Multiplikationssatz lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}_{\rho(K)} \supseteq K$ also insbesondere gleichmäßig in K. Da $K \subseteq G$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Wir werden uns nun noch von einigen überflüssigen Voraussetzungen des soeben bewiesenen Satzes befreien, bevor wir uns den Anwendungen widmen.

Korollar 3.1.3. *Es sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion, die in der Nullumgebung $\mathbb{D}_{\rho(F)}$ holomorph ist, G ein zulässiges Gebiet, $f \in H(G)$ mit $\rho(f) > 1$. Dann gibt es eine Funktion $< F > (f) \in H(G)$, so daß $\widehat{< F >}(f) = F \circ \widehat{f}$ ist.*

Beweis. Da $\rho(f) > 1$, ist $\widehat{f}(n) \to 0$, und damit $|\widehat{f}(n)| < \rho(F)$ schließlich. Also gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, so daß $\|\widehat{f-p}\|_\infty < \rho(F)$ gilt. Wir definieren $g := f - p$ und stellen fest, daß dann $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ schließlich gilt. Nach Satz 3.1.2 ist dann

$$< F > (g) := \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{F}(n) g^{<n>} \in H(G) \text{ mit } \widehat{< F >}(g) = F \circ \widehat{g}.$$

Nun ist $F \circ \widehat{f}(n) = F \circ \widehat{g}(n)$ schließlich. Also ist die Differenz $\widehat{q} = F \circ \widehat{f} - F \circ \widehat{g}$ die Koeffizientenfolge eines Polynoms q. Definieren wir

$$< F > (f) :=< F > (g) + q \in H(G),$$

so ist

$$\widehat{< F >}(f) = F \circ \widehat{g} + \widehat{q} = F \circ \widehat{f}.$$

□

§ 2 Invertierbare Elemente

Wir können daraus nun unmittelbar eine Konsequenz für die Invertierbarkeit in $H(G)$ ableiten. Diese wurde im Spezialfall $f = \chi : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ bereits in [RS1] aus anderen Überlegungen abgeleitet.

Korollar 3.2.1. *Es sei G ein zulässiges Gebiet, $f \in H(G)$ invertierbar, $g \in H(G)$ mit $\widehat{g}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\rho(f - g) > 1$. Dann ist auch g invertierbar in $H(G)$.*

Beweis. Wir betrachten $h := -f^{-1} * (g - f) \in H(G)$. Dann ist $\rho(h) > 1$ und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\widehat{h}(n) = -\frac{\widehat{g}(n) - \widehat{f}(n)}{\widehat{f}(n)} = 1 - \frac{\widehat{g}(n)}{\widehat{f}(n)} \neq 1.$$

Nach Korollar 3.1.3 ist dann $< \chi > (h) \in H(G)$, wenn wir $\chi(1)$ durch einen beliebigen Wert definieren. Und es gilt

$$\widehat{< \chi >}(h) = \frac{1}{1 - \widehat{h}} = \frac{1}{1 - 1 + \frac{\widehat{g}}{\widehat{f}}} = \frac{\widehat{f}}{\widehat{g}}.$$

Also ist $f^{-1} * < \chi > (h) \in H(G)$ invers zu g. $\square$

§ 3 Die Räume $\operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0)$

Eine ähnliche Konsequenz erhalten wir für die Zugehörigkeit einer Funktion zu einem maximalen Ideal. Wir benötigen dazu zunächst eine einfache Definition:

Definition 3.3.1. Es sei G ein zulässiges Gebiet, dann definieren wir

$$I_\rho(G) := \{f \in H(G) \mid \rho(f) > 1\}.$$

Offenbar ist $I_\rho(G)$ ein Ideal in $H(G)$. Wir erhalten des weiteren den folgenden Satz.

Satz 3.3.2. *Es sei G ein zulässiges Gebiet, $M \in \operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0)$. Dann ist $M \supseteq I_\rho(G)$.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein $M \in \operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0)$ mit $M \not\supseteq I_\rho(G)$. Dann ist $M + I_\rho(G) = H(G)$. Also gibt es ein $f \in I_\rho(G)$ mit $\chi - f \in M$. Da $\rho(f) > 1$ ist, kann $\widehat{f}(n)$ nicht häufig den Wert 1 annehmen, muß also schließlich von 1 verschieden sein. Da $M \neq \operatorname{Kern} n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist, muß M alle Polynome enthalten. Durch Addition eines Polynoms erreichen wir, daß ohne Einschränkung $\widehat{f}(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ angenommen werden kann. Dann gilt nach Korollar 3.2.1 $\chi - f$ ist invertierbar. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\chi - f \in M$. $\square$

Da für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $z^n \in I_\rho(G)$ und $\chi - z^n \in \operatorname{Kern} n = \mu(n)$ ist, ist $\operatorname{Kern} n \not\supseteq I_\rho(G)$ und wir erhalten das folgende Korollar:

Korollar 3.3.3. *Es sei G ein zulässiges Gebiet. Dann ist* $\operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0) = \mathfrak{M}(I_\rho(G))$.

Wir können daraus noch eine einfache Konseqenz ableiten, die uns im weiteren hilft, die fixierten maximalen Ideale, also solche vom Typ $\operatorname{Kern} n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) von freien, maximalen Idealen, womit wir alle anderen meinen, zu unterscheiden.

Korollar 3.3.4. *Es sei G ein zulässiges Gebiet. Ein maximales Ideal* $M \in \operatorname{Max} H(G)$ *ist genau dann fixiert, wenn* $\{M\} \subseteq \operatorname{Max} H(G)$ *offen ist.*

Beweis. Nach Korollar 3.3.3 ist $\operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0) = \mathfrak{M}(I_\rho(G))$ und damit eine abgeschlossene Menge. Somit ist $\mu_G(\mathbb{N}_0) \subseteq \operatorname{Max} H(G)$ offen. Da die Einbettung μ_G ein Homöomorphismus zwischen $\mathbb{N}_0$ und $\mu_G(\mathbb{N}_0)$ mit der von $\operatorname{Max} H(G)$ induzierten Teilraumtopologie ist, muß $(\{\mu_G(n)\})$ eine offene Menge in $\mu_G(\mathbb{N}_0)$ sein, und damit auch in $\operatorname{Max} H(G)$, da $\mu_G(\mathbb{N}_0) \subseteq \operatorname{Max} H(G)$ selbst offen ist.
Für alle freien, maximalen Ideale $M \in \operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0)$ kann $\{M\} \subseteq H(G)$ nicht offen sein, da $\mu_G(\mathbb{N}_0)$ dicht in $\operatorname{Max} H(G)$ liegt und somit jede offene Menge ein Element aus $\mu_G(\mathbb{N}_0)$ enthalten muß. $\square$

Die Menge der zulässigen Gebiete unterteilt sich in einfach und mehrfach zusammenhängende Gebiete G. Wir werden sehen, daß die mehrfach zusammenhängenden Gebiete ähnliche Strukturräume $\operatorname{Max} H(G)$ hervorbringen. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet. Wir definieren $\kappa(G)$ als die Anzahl der Punkte von G^c am Rande des Einheitskreises. Ist $\kappa(G) = \infty$ so ist $G = \mathbb{D}$ nicht mehrfach zusammenhängend. Ist $\kappa(G) = k < \infty$, so muß wegen der multiplikativen Abgeschlossenheit von G^c die Menge $G^c \cap \partial\mathbb{D}$ aus den k-ten Einheitswuzeln $e_k^j = e^{\frac{j \cdot 2\pi i}{k}}, j \in \mathbb{Z}_k$ bestehen. Nach [BM2] ist bekannt, daß diese Punkte isoliert in G^c sein müssen, wenn G mehrfach zusammenhängend ist. Wir definieren

$$H_k := \{f \in H(\mathbb{C}_\infty \setminus \{e_k^j \mid j \in \mathbb{Z}_k\}) \ : \ f(\infty) = 0\}.$$

Dann ist $H(G) = H_k + I_\rho(G)$ und $H_k \cap I_\rho(G) = \{0\}$ und daher H_k Algebra-Isomorph zu $H(G)/I_\rho(G)$. Daraus erhalten wir nach Lemma 1.3.1 und Korollar 3.3.3 das folgende

Korollar 3.3.5. *Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes, zulässiges Gebiet mit* $\kappa(G) = k$. *Dann ist*

$$\operatorname{Max} H_k \simeq \operatorname{Max}(H(G)/I_\rho(G)) \simeq \mathfrak{M}(I_\rho(G)) = \operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0).$$

Wir sehen also, daß im Falle mehrfach zusammenhängender Gebiete die topologische Struktur der Räume $\operatorname{Max} H(G) \simeq \operatorname{Max} H_{\kappa(G)} \cup \mu_G(\mathbb{N}_0)$ ausschließlich von der Anzahl $\kappa(G)$ abhängt und nicht vom Verhalten im Äußeren des Einheitskreises.

§ 4 Die Räume $\operatorname{Max} H_k$

Wir werden nun eine Isomorphie herleiten, die uns ermöglicht die Mengen $\operatorname{Max} H_k$ zu bestimmen. Wir bezeichnen $\chi_a(z) = \frac{a}{a-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{a}}$ und beachten, daß dann $\widehat{\chi_a}(n) = a^{-n}$ ist, und somit $\chi_a * \chi_b = \chi_{a \cdot b}$ und es gilt $(\chi_a * f)(z) = f(\frac{z}{a})$ für alle Funktionen f, die in einer 0-Umgebung holomorph sind (vgl. [Z]).

Definition 3.4.1. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}_k$ die Funktion

$$\gamma_k^m := \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{m \cdot j} \chi_{e_k^j}.$$

Offenbar ist $\gamma_k^m \in H_k$. Wir zeigen

Lemma 3.4.2. *Es ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\widehat{\gamma_k^m}(n) = 1_{\{n \equiv m \mod k\}}$, und somit*

$$\gamma_k^m(z) = z^m \cdot \chi(z^k) = \frac{z^m}{1 - z^k}.$$

Beweis. Es ist

$$\widehat{\gamma_k^m}(n) = \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{m \cdot j} \widehat{\chi_{e_k^j}}(n) = \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{m \cdot j} \cdot e_k^{-j \cdot n}$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{(m-n) \cdot j} = \frac{1}{k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} (e_k^{(m-n)})^j = 1_{\{n \equiv m \mod k\}}.$$

□

Wir benötigen im folgenden einige Rechenregeln für die soeben definieren Funktionen

Lemma 3.4.3. *Es gilt für alle $p, q \in \mathbb{Z}_k$ und $m \in \mathbb{Z}$:*

$$\gamma_k^p * \gamma_k^q = \delta_{p,q} \cdot \gamma_k^p,$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{-j \cdot m} \cdot \gamma_k^j = \chi_{e_k^m},$$

$$\chi_{e_k^j} * \gamma_k^m = e_k^{-m \cdot j} \cdot \gamma_k^m.$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus Lemma 3.4.2.
Die zweite Gleichung ersehen wir anhand der TAYLOR-Koeffizienten an den Stellen $n = p + r \cdot k$:

$$(\sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{-j\cdot m} \cdot \gamma_k^j)\hat{}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{-j\cdot m} \delta_{j,p} = e_k^{-p\cdot m} = \chi_{e_k^m}(p) = \chi_{e_k^m}(n).$$

Die letzte Gleichung folgt dann aus Lemma 3.4.2:

$$\chi_{e_k^j} * \gamma_k^m = \sum_{l \in \mathbb{Z}_k} e_k^{-l\cdot j} \cdot \gamma_k^l * \gamma_k^m = \sum_{l \in \mathbb{Z}_k} e_k^{-l\cdot j} \cdot \delta_{l,m} \cdot \gamma_k^m = e_k^{-m\cdot j} \cdot \gamma_k^m.$$

□

Wir werden nun einen Algebra-Isomorphismus zwischen H_1^k und H_k angeben. Wir verwenden dabei die Bezeichnung A^k für das k-fache kartesische Produkt einer Algebra A, wodurch A^k selbst wieder zu einer Algebra wird, deren Elemente die k-Tupel $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}_k}$ mit $f_j \in A$ für alle $j \in \mathbb{Z}_k$ sind. Für A setzen wir zum einen die HADAMARD-Algebren H_1 und H_k ein, zum anderen aber auch die Algebra E_0, der ganzen Funktionen vom Exponentialtyp 0, die wir mit der üblichen, punktweisen Multiplikation ausstatten.

Definition 3.4.4. Es sei

$$\Sigma : H_1^k \to H_k : (f_j)_{j \in \mathbb{Z}_k} \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^j * f_j.$$

Nach dem HADAMARDschen Multiplikationssatz ist Σ wohldefiniert und linear.
Zum Beweis der Multiplikativität seien $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}_k}, (g_j)_{j \in \mathbb{Z}_k} \in H_1^k$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\Sigma\Big((f_j)_{j \in \mathbb{Z}_k}\Big) * \Sigma\Big((g_m)_{m \in \mathbb{Z}_k}\Big) = (\sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^j * f_j) * (\sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^m * g_m) \\
(4.1)\quad &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^j * \gamma_k^m * f_j * g_m = \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^j * f_j * g_j = \Sigma\Big((f_j * g_j)_{j \in \mathbb{Z}_k}\Big).
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß Σ injektiv ist, betrachten wir ein beliebiges $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}_k} \in \operatorname{Kern} \Sigma$. Dann ist $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n \in j + k \cdot \mathbb{N}_0$. Da aber $\widehat{f} \in E_0$ ist, ist nach dem Satz von Carlson (s. [Bo] od. [Bi]) $\widehat{f} = 0$ und damit $f = 0$. Also ist Σ injektiv. Um zu erkennen, daß Σ auch surjektiv ist, benötigen wir weitere Überlegungen.

Definition 3.4.5. Es sei G ein mehrfach zusammenhangendes Gebiet mit $\kappa(G) = k$. Dann definieren wir

$$\Pi : H(G) \to H_1 : \Pi(f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-1|=\epsilon(z)} \frac{f(t)}{z-t} dt,$$

wobei wir z.B. $\epsilon(z) = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z, G^c) > 0$ wählen können.

Wir stellen fest, daß Π wohldefiniert, linear und idempotent ist (vgl. [Z]). Nach dem Residuensatz gilt für alle $f \in H_k$, hinreichend kleines $\epsilon > 0$ und großes $R > 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z|=\epsilon} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \frac{f(t)}{t-z} dt \; - \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-e_k^j|=\epsilon} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-e_k^j|=\epsilon} \frac{f(t)}{z-t} dt,$$

da f im Punkt ∞ holomorph ist. Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-e_k^j|=\epsilon} \frac{f(t)}{z-t} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s-1|=\epsilon} \frac{f(e_k^j \cdot s)}{z - e_k^j \cdot s} e_k^j ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s-1|=\epsilon} \frac{(\chi_{e_k^{-j}} * f)(s))}{e_k^{-j} \cdot z - s} ds$$

$$= \Pi(\chi_{e_k^{-j}} * f)(e_k^{-j} \cdot z) = (\chi_{e_k^j} * \Pi(\chi_{e_k^{-j}} * f))(z).$$

Zusammen folgt

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \chi_{e_k^j} * \Pi(\chi_{e_k^{-j}} * f).$$

Wir betrachten die Abbildungen

$$\Pi_k^m(f) = k \cdot \Pi(\gamma_k^m * f) \quad \text{für alle} \quad f \in H(G).$$

Nach Lemma 3.4.3 gilt dann für alle $f \in H_k$:

$$\Sigma\Big((\Pi_k^m(f))_{m \in \mathbb{Z}_k}\Big) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^m * \Pi_k^m(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} k \cdot \gamma_k^m * \Pi(\gamma_k^m * f)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^m * \Pi(e_k^{m \cdot j} \chi_{e_k^j} * \gamma_k^m * f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} e_k^{m \cdot j} \gamma_k^m * \Pi(\chi_{e_k^j} * \gamma_k^m * f) \tag{4.2}$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} \chi_{e_k^{-j}} * \gamma_k^m * \Pi(\chi_{e_k^j} * \gamma_k^m * f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_k} \gamma_k^m * f = f.$$

Somit ist Σ surjektiv. Da die Abbildung $\Sigma : H_1^k \to H_k$ nach dem Hadamardschen Multiplikationssatz (s. [Z]) stetig ist, Σ bijektiv und beide Räume Fréchet Räume sind, ist Σ außerdem eine Isometrie, nach dem Satz von der offenen Abbildung. Da wir bereits wissen, daß $(H_1, +, *)$ und $(E_0, +, \cdot)$ isometrisch isomorph sind erhalten wir zusammenfassend den folgenden Satz.

Satz 3.4.6. *Es sei* $k \in \mathbb{N}$. *Dann sind* $(H_k, +, *)$, $(H_1^k, +, *)$ *und* $(E_0^k, +, \cdot)$ *paarweise isometrisch (Algebra)-isomorph.*

Nach Korollar 1.6.2 ergibt sich daraus unmittelbar das folgende Ergbnis.

Korollar 3.4.7. *Es sei* $k \in \mathbb{N}$. *Dann ist*

$$\operatorname{Max} H_k \simeq \mathbb{Z}_k \times \operatorname{Max} H_1 \simeq \mathbb{Z}_k \times \operatorname{Max} E_0.$$

Nach Korollar 3.3.5 gilt dann

Korollar 3.4.8. *Es sei* $G \subseteq \mathbb{C}$ *ein mehrfach zusammenhängendes, zulässiges Gebiet.Dann ist*

$$\operatorname{Max} H(G) \setminus \mu_G(\mathbb{N}_0) = \mathbb{Z}_{\kappa(G)} \times \operatorname{Max} E_0.$$

Insbesondere ist die Abbildung $\Pi_k : H(G) \to H_1^k : f \mapsto (\Pi_k^j(f))_{j\in\mathbb{Z}_k}$ nach 4.2, 4.1 und der Tatsache, daß $\Pi_k(f) = 0$ für alle $f \in I_\rho(G)$ ist, ein Algebra-Homomorphismus von $H(G)$ nach H_1^k. Und es gilt

$$\operatorname{Kern} \Pi_k = I_\rho(G). \tag{4.3}$$

Da es in E_0 weder Nullteiler noch nichtkonstante, invertierbare Elemente gibt, sind nach Lemma 1.2.2 keine zwei maximalen Ideale in E_0 trennbar. Nach Satz 2.2.5 haben $\operatorname{Max} H(\mathbb{C}\setminus\{1\})$, damit $\operatorname{Max} H_1$ und daher auch $\operatorname{Max} E_0$ die gleiche Mächtigkeit wie $\beta\mathbb{N}_0$. Der Raum $\operatorname{Max} H(G)$ besteht also aus $\kappa(G)$ Zusammenhangskomponenten, die 2^c Elemente besitzen, die paarweise topologisch untrennbar sind. Betrachten wir den Isomorphismus Σ, dann erhalten wir für $n = p + q \cdot k, p \in \mathbb{Z}_k$:

$$\Sigma\Big((f_j)_{j\in\mathbb{Z}_k}\Big)\hat{}\,(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} (\gamma_k^j * f_j)\hat{}\,(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} \widehat{\gamma_k^j}(n) \cdot \widehat{f_j}(n) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} \delta_{pj} \widehat{f_j}(n) = \widehat{f_p}(n). \tag{4.4}$$

Daraus folgt, daß die TAYLOR-Koeffizienten $\widehat{f}(n)$ einer Funktion $f \in H_k$ sich zyklisch aus k Funktionen $\widehat{f_j} \in E_0$ zusammensetzen. Für die Einbettung $\mu_G(\mathbb{N}_0)$ bedeutet das, daß die maximalen Ideale $\operatorname{Kern} n$ zwischen den k verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{Max} H(G)$ periodisch hin und herspringen und dabei in jeder dieser Komponenten mit Mächtigkeit 2^c dicht liegen. Wir erhalten aus der Gleichung 4.4 aber auch noch eine weitere Folgerung. Wir untersuchen die invertierbaren Elemente und erhalten ein Resultat, welches auf andere Weise schon in [BM1] bewiesen wurde.

Korollar 3.4.9. *Es sei G ein mehrfach zusammenhängendes, zulässiges Gebiet mit $\kappa(G) = k \in \mathbb{N}$. $f \in H(G)$ ist genau dann invertierbar, wenn es $(g_j)_{j\in\mathbb{Z}_k} \in \mathbb{C}^k$ und $h \in I_\rho(G)$ derart gibt, daß*

$$f(z) = h(z) + \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} \frac{g_j \cdot z^j}{1 - z^k}$$

und $\widehat{h}(p + q \cdot k) \neq -g_p$ für alle $p \in \mathbb{Z}_k, q \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis. Ist $f \in H(G)$ invertierbar, so ist für alle $j \in \mathbb{Z}_k$ auch $\Pi_k^j(f) \in H_1$ invertierbar. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn es eine Konstante $g_j \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $\Pi_k^j(f) = g_j \cdot \chi$ ist (vgl. [Z]). Es ist

$$\Sigma\Big(\Pi_k(f)\Big) = \Sigma\Big((g_j \cdot \chi)_{j\in\mathbb{Z}_k}\Big) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} \gamma_k^j * g_j\chi = \sum_{j\in\mathbb{Z}_k} g_j \cdot \frac{z^j}{1 - z^k}.$$

Da aber Π_k ein Algebra-Homomorphismus ist, muss $h = f - \Sigma(\Pi_k(f)) \in \operatorname{Kern} \Pi_k = I_\rho(G)$ sein. Da $\widehat{f}(p + q \cdot k) = \widehat{f}(p + q \cdot k) + g_p \cdot 1 \neq 0$ sein muss, ist die Bedingung des Satzes notwendig für die Invertierbarkeit.

Umgekehrt ist $(g_j \cdot \chi)_{j\in\mathbb{Z}_k}$ offenbar invertierbar in H_1^k und damit $\Sigma((g_j \cdot \chi)_{j\in\mathbb{Z}_k})$ invertierbar in $H_k \subseteq H(G)$. Nach Korollar 3.2.1 ist dann f ebenfalls invertierbar, falls $\widehat{f}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und es folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel IV

Lineare Funktionale

§ 1 Die Cauchy-Transformierte eines Maßes

Wir wollen im folgenden die CAUCHY-Transformation einführen, welche einen durchaus bemerkenswerten Zusammenhang zwischen dem HADAMARD-Produkt und dem Raum der BOREL-Maße herstellt. Die CAUCHY-Transformation wurde in ähnlicher Form in [C] eingeführt, um den Approximationssatz von RUNGE zu beweisen. Der Zusammenhang mit dem HADAMARD-Produkt war bisher jedoch nicht bekannt. Falls nicht anderweitig spezifiziert meinen wir im folgenden mit einem Maß μ stets ein komplexes BOREL-Maß mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\mu \Subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 4.1.1. Es sei μ ein Maß. Dann definieren wir die CAUCHY-Transformierte von μ durch

$$\mu^*(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t-z} \quad \text{für alle} \ \ z \in G(\mu) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu.$$

Wir benötigen außerdem die MELLIN-Transformierte, die wir für alle $z \in \mathbb{C}$ wie folgt definieren

$$\widehat{\mu}(z) = \int t^{-1-z} d\mu(t),$$

wobei wir mit der Potenz im allgemeinen den Hauptwert meinen.

Offenbar ist $\mu^* \in H(G(\mu))$, und es gilt in einer Nullumgebung für z die folgende

Gleichung.

$$\begin{aligned}\mu^*(z) &= \int \frac{d\mu(t)}{t-z} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{t}}d\mu(t) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{t^{n+1}}\, d\mu(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int t^{-1-n} d\mu(t)\cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mu}(n) z^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Und damit insbesondere

$$\widehat{\mu} = \widehat{\mu^*}$$

Da μ einen kompakten Träger besitzt, ist die Menge der möglichen Singularitäten von μ^* beschränkt. Wir bezeichnen mit

$$R(\mu) := \sup_{z\in \operatorname{supp}\mu} |z|.$$

Dann besitzt μ^* eine äußere LAURENT-Entwicklung um den Nullpunkt, die für alle $|z| > R(\mu)$ konvergiert. Es gilt für alle $|z| > R(\mu)$:

$$\begin{aligned}\mu^*(z) &= \int \frac{d\mu(t)}{t-z} = -\int \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{z}}\, d\mu(t) = -\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{z^{n+1}}\, d\mu(t) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int t^n d\mu(t)}{z^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}(-1-n)}{z^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{\mu}(n) z^n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Somit besteht die LAURENT-Entwicklung ausschließlich aus einem Hauptteil und es ist $\mu^*(\infty) = 0$. Wir beachten hierbei, daß die Funktion μ^* nicht notwendig auf einem Gebiet definiert ist, da wir nicht vorausgesetzt haben, daß $\operatorname{supp}\mu$ einfach zusammenhängend ist. Im Gegenteil werden wir als Maß geschlossene Wegintegrale oder Zyklen verwenden, so daß $G(\mu)$ eine Vielzahl von Zusammenhangskomponenten besitzen kann. Die Funktion μ^* setzt sich dann aus je einer holomorphen Funktion auf jeder Zusammenhangskomponente zusammen, wobei die einzelnen Teile völlig unabhängig von einander wählbar sind. Wir wollen dies kurz an einem einfachen Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 4.1.2. Es sei $g \in H(\mathbb{D})$ stetig auf den Rand fortsetzbar. Wir betrachten das Maß

$$\mu(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} g(t)\cdot 1_A(t)\ dt.$$

Dann ist für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \partial\mathbb{D}$

$$\mu^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} g(t)\cdot \frac{1}{t-z}\ dt = g(z)\cdot 1_{\mathbb{D}}(z).$$

Es sei nun $h \in H(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}})$ ebenfalls stetig auf $\partial\mathbb{D}$ fortsetzbar mit $h(\infty) = 0$, und

$$\nu(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} h(t) \cdot 1_A(t)\ dt.$$

Dann ist $\frac{1}{z} \cdot h(\frac{1}{z})$ holomorph in $\mathbb{D}$ und stetig fortsetzbar auf dessen Rand, und es gilt für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \nu^*(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} h(t) \cdot \frac{1}{t-z}\ dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=1} h(\frac{1}{s}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{s}-z}\ \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i z} \oint_{|s|=1} \frac{1}{s} \cdot h(\frac{1}{s}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{z}-s}\ ds = -h(z) \cdot 1_{\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}}(z). \end{aligned}$$

Also stimmt μ^* im Inneren des r-Kreises um den Nullpunkt mit g überein, während es außerhalb verschwindet und ν^* verschwindet innerhalb des Einheitskreises und ist außerhalb identisch mit $-h$. Wir sehen, daß wir durch entsprechende Linearkombinationen jede gewünschte Kombination holomorpher Funktionen auf den unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von $G(\mu)$ erhalten. Insbesondere stellen somit die äußere LAURENT-Entwicklung 1.2 und die TAYLOR-Entwicklung 1.1 nicht notwendig die gleiche Funktion dar.

Wir wollen nun den Zusammenhang mit der HADAMARD-Multiplikation herstellen, in dem wir eine Faltung einführen. Diese wurde in [C, S. 184] bereits eingeführt, jedoch nur auf dem Rand des Einheitskreises, wo sie aus der klassischen Faltung, wie sie bei der FOURIER-Transformation im Einheitsintervall verwendet wird, entspringt. Wir verallgemeinern diese Faltung auf beliebige Teilmengen der komplexen Ebene und untersuchen die Zusammenhänge mit der CAUCHY-Transformation.

Definition 4.1.3. Es seien μ und ν Maße. Dann definieren wir ein Faltungsmaß $\mu * \nu$ für alle BOREL-Mengen $A \subseteq \mathbb{C}$ durch

$$(\mu * \nu)(A) := \int \int 1_A(s \cdot t)\ d\mu(s)\ d\nu(t).$$

Durch die Dichtheit der Treppenfunktionen in $L_1(\mu * \nu)$ erkennen wir sofort, daß dann für alle $f \in L_1(\mu * \nu)$ gilt:

$$\int f\ d(\mu * \nu) = \int \int f(s \cdot t)\ d\mu(s)\ d\nu(t). \tag{1.3}$$

Betrachten wir nun die CAUCHY-Transformation der soeben definierten Faltung, so erhalten wir folgende Zusammenhänge:

$$(1.4)\quad (\mu * \nu)^*(z) = \int\int \frac{1}{st - z}\, d\mu(s)\, d\nu(t) \in H((\operatorname{supp}\mu \cdot \operatorname{supp}\nu)^c) = H(G(\mu) * G(\nu))$$

Und es gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

(1.5)

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \int\int (st)^{-1-n}\, d\mu(s)\, d\nu(t) = \int s^{-1-n}\, d\mu(s) \cdot \int t^{-1-n}\, d\nu(t) = \widehat{\mu}(n) \cdot \widehat{\nu}(n)$$

und damit in einer Nullumgebung

$$(1.6)\qquad (\mu * \nu)^* = \mu^* * \nu^*$$

Die CAUCHY-Transformation wird somit zu einem Algebra Homomorphismus vom Raum der Maße in den Raum der Keime der an Null holomorphen Funktionen mit HADAMARD-Multiplikation.

Gleichung 1.5 gilt jedoch auch für die negativen, ganzen Zahlen, wodurch wir in einer Umgebung um den Punkt ∞ die folgende Identität erhalten

$$(1.7)\qquad (\mu * \nu)^*(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{\mu * \nu}(n) z^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \widehat{\mu}(n) \cdot \widehat{\nu}(n) z^n.$$

Die CAUCHY-Transformierte des Faltungsmaßes $\mu * \nu$ hängt auf der ∞-Komponente von $G(\mu * \nu)$ somit nicht von der Wahl des darstellenden Maßes ab, sondern lediglich von μ^* und ν^* in einer ∞-Umgebung. Damit sind wir in der Lage, ein HADAMARD-Produkt für Funktionen zu definieren, selbst wenn diese nicht im Nullpunkt holomorph sind. Wir benötigen jedoch die Voraussetzung, daß sie beide im Punkt ∞ holomorph sind. Um uns auch davon zu befreien, beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.1.4. *Es seien μ und ν Maße und $G_0 \subseteq G(\mu)$ mit $\mu^*|_{G_0} = 0$.*
Dann ist $(\mu * \nu)^*|_{G_0 * G(\nu)} = 0$.

Beweis. Da wir generell vorausgesetzt haben, daß $0, \infty \notin \operatorname{supp}\nu$, ist insbesondere $\frac{z}{t} \in G_0$ für alle $z \in G_0 * G(\nu)$ und alle $t \in \operatorname{supp}\nu = G(\nu)^c$. Somit gilt für alle $z \in G_0 * G(\nu)$

$$(\mu * \nu)^*(z) = \int\int \frac{d\mu(s)\, d\nu(t)}{st - z} = \int\int \frac{d\mu(s)}{s - \frac{z}{t}}\, \frac{d\nu(t)}{t}$$

$$= \int \mu^*(\frac{z}{t}) \frac{d\nu(t)}{t} = \int 0 \; d\nu(t) = 0.$$

□

Ist also $\mu_1^* = \mu_2^*$ auf G_1 und $\nu_1^* = \nu_2^*$ auf G_2, so gilt für alle $z \in G_1 * G_2$ nach Lemma 4.1.4

$$\begin{aligned}(\mu_1 * \nu_1)^*(z) &= (\mu_2 * \nu_1)^*(z) + ((\mu_1 - \mu_2) * \nu_1)^*(z) = (\mu_2 * \nu_1)^*(z) + 0 \\ &= (\mu_2 * \nu_2)^*(z) + (\mu_2 * (\nu_1 - \nu_2))^*(z) = (\mu_2 * \nu_2)^*(z) + 0 \\ &= (\mu_2 * \nu_2)^*(z).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Somit hängt die CAUCHY-Transformierte des Faltungsmaßes nicht von der Wahl des Repräsentanten Maßes ab, und wir können das HADAMARD-Produkt für Funktionen auch dann definieren, wenn sie weder im Nullpunkt noch in ∞ holomorph sind.

Definition 4.1.5. Es seien μ, ν Maße. Dann definieren wir für alle $z \in G(\mu) * G(\nu)$ das HADAMARD-Produkt durch

$$(\mu^* * \nu^*)(z) := (\mu * \nu)^*(z).$$

Diese Definition stimmt im Fall der in 0 holomorphen Funktionen mit der Beobachtung 1.6 überein und ist in den übrigen durch Gleichung 1.8 wohldefiniert. Nun waren wir ursprünglich eher am HADAMARD-Produkt zweier beliebiger, holomorpher Funktionen interessiert. Somit stellt sich die Frage, für welche holomorphen Funktionen wir das HADAMARD-Produkt soeben definiert haben. Die Antwort lautet: Im wesentlichen für alle! Dies zeigen uns die folgenden Lemmata.

Lemma 4.1.6. *Es sei $f \in H(G)$, $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ offen und $K \Subset G$ kompakt. Dann gibt es ein Maß μ mit Träger* $\operatorname{supp}\mu \Subset G \setminus K$ *und $\mu^*(z) = f(z)$ für alle $z \in K$.*

Beweis. Wir betrachten zuerst denn Fall $\infty \notin G$. Es sei Γ ein Zyklus in $G \setminus K$ mit Umlaufzahl $n(z, \Gamma) = 1$ für alle $z \in K$ und $n(z, \Gamma) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus G$.
Betrachte $d\mu = -\frac{1}{2\pi i} f d\Gamma$. Dann gilt für alle $z \in K$

$$\mu^*(z) = \oint_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \frac{f(t)dt}{t - z} = f(z).$$

Es sei nun $\infty \in G$. Da $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ gibt es ein $a \in \mathbb{C}_\infty \setminus G$. Dann bildet die Abbildung $\gamma : z \mapsto \frac{1}{z-a}$ die Menge G in eine offene Menge $G' \subseteq \mathbb{C}$ ab. Also gibt es ein Maß ν mit

Träger in $G' \setminus \gamma(K)$, so daß $\nu^*(z) = -\frac{1}{\gamma(z)}\ f(\gamma^{-1}(z))$ für alle $z \in \gamma(K)$. Wir definieren $d\mu(t) = \frac{d\nu(\gamma(t))}{\gamma(t)}$ für alle $t \in G$. Dann gilt für alle $z \in K \setminus \{\infty\}$

$$\begin{aligned}
\mu^*(z) &= \int \frac{d\mu(t)}{t-z} = \int \frac{1}{t-z}\ \frac{d\nu(\gamma(t))}{\gamma(t)} = \int \frac{1}{\gamma^{-1}(s)-z}\ \frac{d\nu(s)}{s} \\
&= \int \frac{1}{\frac{1}{s}+a-z}\ \frac{d\nu(s)}{s} = -\frac{1}{z-a}\int \frac{d\nu(s)}{s-\frac{1}{z-a}} \\
&= -\gamma(z)\ (-\frac{1}{\gamma(z)})\ f(\gamma^{-1}(\gamma(z))) = f(z).
\end{aligned}$$

□

Dies bedeutet, wir finden zu jeder Funktion $f \in H(G)$ ein Maß, dessen Cauchy-Transformierte auf einer beliebig großen, kompakten Teilmenge mit f übereinstimmt. Iterieren wir nun noch die Teilgebiete durch eine Ausschöpfungsfolge, so erhalten wir eine Folge von Maßen, dessen Cauchy-Transformierte auf G lokal schließlich identisch f ist.

Lemma 4.1.7. *Es sei G_n eine gegen G aufsteigende Folge offener Mengen, $f_n \in H(G_n)$ und $f_{n+1}|_{G_n} = f_n$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f \in H(G)$, so daß $f_n = f|_{G_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Insbesondere konvergiert f_n in Kompakta gegen f.*

Beweis. Es sei $z \in G$ und $n_0(z) = \min\{n \in \mathbb{N}_0\ :\ z \in G_n\}$. Wir definieren $f(z) = f_{n_0(z)}(z)$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß die gesamte ϵ-Umgebung $U_\epsilon(z) \subseteq G_{n_0(z)}$ ist, denn G_n ist aufsteigend. Nach Voraussetzung ist dann $f|_{G_n} = f_n$ und damit f holomorph in einer z-Umgebung und damit in ganz G. □

Betrachten wir nun zwei Funktionen $p \in H(P)$ und $q \in H(Q)$. Dann gibt es Ausschöpfungsfolgen offener Mengen $P_n \subseteq P$ und $Q_n \subseteq Q$. Wir sagen, zwei Mengen $P, Q \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ sind multiplizierbar, falls bei der Produktbildung $P^c \cdot Q^c$ kein Produkt vom Typ $0 \cdot \infty$ entsteht. Das heißt, falls $0 \notin P$, muß $\infty \in Q$ sein, und umgekehrt. Wir bezeichnen dabei $P^c := \mathbb{C}_\infty \setminus P$ und definieren $P * Q := (P^c \cdot Q^c)^c$.

Lemma 4.1.8. *Es seien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigende Folgen offener, multiplizierbarer Mengen in $\mathbb{C}_\infty$. Dann ist*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(P_n * Q_n) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n) * (\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n).$$

Beweis. Es sei

$$P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \quad \text{und} \quad Q := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Wir zeigen die offenbar äquivaltente Aussage

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c \cdot Q_n^c = P^c \cdot Q^c.$$

Es ist $P_n^c \supseteq P^c$ und $Q_n^c \supseteq Q^c$, somit $P_n^c \cdot Q_n^c \supseteq P^c \cdot Q^c$ und damit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c \cdot Q_n^c \supseteq P^c \cdot Q^c.$$

Andererseits ist $P_n^c \cdot Q_n^c \subseteq P_n^c \cdot Q_m^c$ für alle $n \geq m$. Somit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c \cdot Q_n^c = \bigcap_{n=m}^{\infty} P_n^c \cdot Q_n^c \subseteq \bigcap_{n=m}^{\infty} P_n^c \cdot Q_m^c = P^c \cdot Q_m^c.$$

und damit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^c \cdot Q_n^c \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} P^c \cdot Q_m^c = P^c \cdot Q^c.$$

□

§ 2 Der Hadamardsche Multiplikationssatz

Der HADAMARDsche Multiplikationssatz wurde im Beweis von MÜLLER in [M1] auf den RUNGEschen Approximationssatz zurückgeführt, und mit Hilfe von geeigneten Zyklen dargestellt, so daß das PARSEVAL-Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t) g(\frac{z}{t}) \frac{dt}{t}$$

wohldefiniert ist. Diese Methode hat POHLEN in seiner Dissertation ([Po]) aufgegriffen und den HADAMARDschen Multiplikationssatz auch für Gebiete G_1, G_2, die den Nullpunkt nicht enthalten, bewiesen.

Die im vorangegangenen Abschnitt diskutierte Methode, das HADAMARD-Produkt über die CAUCHY-Transformation einzuführen, wirft als Nebenresultat die Möglichkeit ab, den HADAMARDschen Multiplikationssatz in wenigen Zeilen zu beweisen, und dies im allgemeinsten Fall. Wie wir im Beweis von Lemma 4.1.4 gesehen haben, erfüllt die CAUCHY-Transformierte der Maß-Faltung die Gleichung

$$(\mu * \nu)^*(z) = \int \mu^*(\frac{z}{t}) \frac{d\nu(t)}{t} \quad \text{für alle } z \in G(\mu) * G(\nu), \tag{2.9}$$

so daß die Einführung über die CAUCHY-Transformation mit MÜLLERs Methode eine gewisse Ähnlichkeit aufweist. Wir beachten bei der Formulierung des folgenden Satzes, daß wir die Eigenschaft $f(\infty) = 0$ in die Definition der Holomorphie am Punkt ∞ mit einschließen. Da wir bereits wissen, daß die CAUCHY-Transformierte μ^* jedes Maßes μ in ∞ holomorph ist, folgt insbesondere, daß $(\mu * \nu)^*$ stets in ∞ holomorph ist. Damit decken wir den Fall $\infty \in P*Q$ in der folgenden Argumentation auch ohne eine Fallunterscheidung mit ab.

Satz 4.2.1 (HADAMARDscher Multiplikationssatz)**.** *Es seien $P, Q \subseteq \mathbb{C}_\infty$ offene, multiplizierbare Mengen, $p \in H(P)$ und $q \in H(Q)$. Dann ist $p * q \in H(P * Q)$, und es ist $* : (p, q) \in H(P) \times H(Q) \mapsto p * q \in H(P * Q)$ eine stetige, bilineare Abbildung.*

Beweis. Es sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen P aufsteigende Folge offener Mengen, die in P kompakt enthalten sind. Nach Lemma 4.1.6 gibt es dann Maße μ_n mit $\operatorname{supp} \mu_n \subseteq P \setminus \overline{P}_n$ und $\mu_n^*|_{P_n} = p$. Analog finden wir entsprechende, offene Mengen Q_n und Maße ν_n mit $\operatorname{supp} \nu_n \subseteq Q \setminus \overline{Q}_n$ und $\nu_n^*|_{Q_n} = q$. Nach 1.4 und 1.6 ist dann $\mu_n * \nu_n$ ein Maß mit

$$p * q = \mu_n^* * \nu_n^* = (\mu_n * \nu_n)^* \in H(P_n * Q_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Und damit

$$p * q \in H\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n * Q_n\Big) = H(P * Q)$$

nach Lemma 4.1.8.

Die Stetigkeit erkennen wir durch die Integraldarstellung 2.9.
Es sei $q_n \to 0$ in $H(Q)$, $K \Subset P*Q$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \Subset P_m * Q_m$, und damit ein Maß μ mit $\mu^*|_{\overline{P}_m} = p$. Wir bezeichnen mit $\|f\|_X := \sup_{x\in X} |f(x)|$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|p * q_n\|_K = \|\mu^* * q_n\|_K &= \sup_{z\in K} \left| \int q_n(\frac{z}{t}) \ \frac{d\mu(t)}{t} \right| \\
&\leq \int \|q_n\|_{\overline{Q}_m} \ \frac{d|\mu|(t)}{\operatorname{dist}(0, \operatorname{supp} \mu)} \\
&\leq \|q_n(w)\|_{\overline{Q}_m} \ \frac{|\mu|(\mathbb{C})}{\operatorname{dist}(0, \operatorname{supp} \mu)} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Da das HADAMARD-Produkt symmetisch in beiden Komponenten ist, ist es auch in der ersten Komponente stetig. Nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS ist dann $*$ verbunden stetig (vgl. [Z]). $\square$

Wir wollen nun noch eine einfache Folgerung aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz ziehen, bei der wir nicht nur offene, sondern auch kompakte Teilmengen der komplexen Zahlenkugel einbeziehen. Wir benötigen dafür zunächst eine einfache Definition.

Definition 4.2.2. Es sei $K \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ kompakt. Dann definieren wir

$$H(K) := \bigcup \{H(G) \ : \ K \Subset G \subsetneq \mathbb{C}_\infty \text{ offen}\}.$$

Dabei sehen wir die Elemente von $H(G)$ als Keime an, so daß $G_1 \subseteq G_2$ die Inklusion $H(G_1) \supseteq H(G_2)$ nach sich zieht. Als Topologie wird die Topologie der absolutkonvexen Hülle auf $H(K)$ eingeführt. Diese ist so konstruiert, daß eine Folge $(f_n)_{n=0}^\infty$ genau dann gegen ein $f \in H(K)$ konvergiert, wenn es eine offene Menge $G \Supset K$ gibt, so daß $f, f_n \in H(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und $f_n \longrightarrow f$ in $H(G)$ gilt (s. [Kö, S. 39]).
Mit dieser Topologie wird $H(K)$ zu einem lokalkonvexen, folgenvollständigen topologischen Vektorraum, in dem jede auf $H(K)$ definierte, folgenstetige Abbildung stetig ist.

Wir definieren $\mathfrak{G}$ als die Menge aller echten, nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{C}_\infty$, welche entweder offen oder kompakt sind.

Korollar 4.2.3 (Allgemeinste Version des Hadamardschen Multiplikationssatzes)**.** *Es seien $P, Q \in \mathfrak{G}$ multiplizierbar, $p \in H(P), q \in H(Q)$. Dann ist $p * q \in H(P * Q)$. Zudem ist die Abbildung $* : H(P) \times H(Q) \to H(P * Q)$ stetig.*

Beweis. Nach der Definition von $H(P)$ gibt es offene Mengen $P' \supseteq P$ und $Q' \supseteq Q$ mit $p \in H(P')$ und $q \in H(Q')$. Somit ist nach dem Hadamardschen Multiplikationssatz $p * q \in H(P' * Q') \subseteq H(P * Q)$.
Zum Beweis der Stetigkeit betrachten wir konvergente Folgen $p_n \to p \in H(P)$ und $q_n \to q \in H(Q)$. Wiederum findet die Konvergenz in Teilräumen $H(P')$ und $H(Q')$ statt, wobei $P' \supseteq P$ und $Q' \supseteq Q$ offene Mengen sind. Nach dem Hadamardschen Multiplikationssatz konvergiert dann $p_n * q_n \to p * q$ lokal gleichmäßig in $P' * Q' \supseteq P * Q$ und damit insbesondere in $H(P * Q)$. □

§ 3 Das Hadamard-Produkt als Bilinearform

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß das HADAMARD-Produkt eine Bilinearform auf $H(P) \times H(Q)$ induziert, falls das HADAMARDsche Mengenprodukt $P * Q$ die Eins enthält. Wir werden daraus im weiteren Verlauf einen Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale ableiten.Wir benötigen zunächst eine Art inverses Element für das HADAMARDsche Mengenprodukt.

Definition 4.3.1. Es sei $X \in \mathfrak{G}$. Dann definieren wir

$$X^\dagger := \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus X} = \{\frac{1}{z} \ : \ z \in \mathbb{C}_\infty \setminus X\}.$$

Die so definierte Menge, ist die kleinste Menge, deren Produkt mit X die 1 enthält.

Lemma 4.3.2. *Es seien* $X, Y \in \mathfrak{G}$. *Es ist*

$$1 \in X * Y \quad \textit{genau dann, wenn} \quad Y \supseteq X^\dagger.$$

Insbesondere ist $1 \in X * X^\dagger$.

Beweis. Wir zeigen zunächst den Zusatz und nehmen an, $1 \notin X * X^\dagger$. Dann ist $1 \in (\mathbb{C}_\infty \setminus X) \cdot (\mathbb{C}_\infty \setminus X^\dagger)$. Somit gibt es ein $x \notin X$ mit $\frac{1}{x} \notin X^\dagger$. Dann ist $x \in \mathbb{C}_\infty \setminus X$ und damit $\frac{1}{x} \in \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus X} = X^\dagger$. Dies ist ein Widerspruch zu $\frac{1}{x} \notin X^\dagger$. Somit gilt für alle $Y \supseteq X^\dagger$

$$1 \in X * X^\dagger \subseteq X * Y.$$

Für die umgekehrte Implikation, geben wir uns eine Menge Y vor, so daß $1 \in X * Y$. Dann gilt

$$1 \in X * Y = (X^c \cdot Y^c)^c = (\bigcup_{x \in X^c} x \cdot Y^c)^c = \bigcap_{x \in X^c} x \cdot Y.$$

Das heißt, für alle $x \in X^c = \mathbb{C}_\infty \setminus X$ gibt es ein $y \in Y$, so daß $x \cdot y = 1$. Damit ist $y = \frac{1}{x} \in \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus X} = X^\dagger$ und somit $Y \supseteq X^\dagger$. □

Betrachten wir nun die Räume $H(X)$ und $H(X^\dagger)$, so folgt aus 4.2.3 daß das HADAMARD-Produkt diese bilinear und stetig auf $H(X * X^\dagger)$ abbildet. Da $1 \in X * X^\dagger$ ist, ist der Auswertungsoperator an der Stelle 1 ein stetiges, lineares Funktional auf $H(X * X^\dagger)$. Wir erhalten daraus die folgende Konsequenz.

Korollar 4.3.3. *Es sei $X \in \mathfrak{G}$. Dann ist $< \mid >: H(X) \times H(X^\dagger)$ definiert durch*

$$(f, g) \in H(X) \times H(X^\dagger) \ \mapsto \ < f \mid g > := (f * g)(1)$$

eine stetige Bilinearform.

Aus der Definition von $X^\dagger$ folgt unmittelbar $X^{\dagger\dagger} = X$. Da das Hadamard-Produkt kommutativ ist, gilt offenbar $< f \mid g > = < g \mid f >$. Bevor wir zu weiteren Anwendungen kommen, wollen wir die Tragweite des soeben eingeführten, verallgemeinerten Hadamard-Produkts und der daraus gewonnenen Bilinearform anhand einiger Beispiele verdeutlichen.

Beispiel 4.3.4. Es sei $f \in H(\{0\})$. Wir bezeichnen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit z^n die Abbildung $(z \mapsto z^n) \in H(\mathbb{C}) = H(\{0\}^\dagger)$. Dann ist

$$< z^n \mid f > = (z^n * f)(1) = \widehat{f}(n) \cdot z^n|_{z=1} = \widehat{f}(n).$$

Die Bilinearform erzeugt somit die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung um den Nullpunkt.

Beispiel 4.3.5. Es sei $G \in \mathfrak{G}$, $\infty \notin G$ und $a \in G$. Wie in den vorangegangenen Kapiteln schreiben wir $\chi(z) = \frac{1}{1-z}$. Somit ist $\chi(az) \in H(G^\dagger)$. Und es gilt für alle $f \in H(G)$

$$< \chi(az) \mid f > = (\chi(az) * f(z))(1) = (\chi(z) * f(az))(1) = f(az)|_{z=1} = f(a).$$

Auch der Auswertungshomomorphismus $f \mapsto f(a)$ läßt sich somit mit Hilfe der Bilinearform darstellen.

Beispiel 4.3.6. Wir betrachten den Raum H_1, wie er in Kapitel II eingeführt wurde. Nach unserer Definition ist $H_1 = H(\mathbb{C}_\infty \setminus \{1\}) = H(\{1\}^\dagger)$. Die Bilinearform $< \mid >$ ist somit auf $H(\{1\}) \times H_1$ definiert. Und wir sehen, daß jede Funktion, die in einer Umgebung des Punktes 1 holomorph ist, ein stetiges, lineares Funktional auf H_1 induziert. Insbesondere die Funktionen $z \mapsto z^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ ist in einer 1-Umgebung holomorph. Und es ist für alle $f \in H_1$ und

$$\mu(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-1|=\epsilon} f(t)\ 1_A(t) dt$$

$$< z^\alpha \mid f > = (z^\alpha * f)(1) = (z^\alpha * \mu^*)(1) = \int (\frac{z}{t})^\alpha \frac{d\mu(t)}{t}|_{z=1}$$

$$= \int t^{-1-\alpha} d\mu(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-1|=\epsilon} t^{-1-\alpha} f(t) dt = \widehat{f}(\alpha).$$

Das heißt, die MELLIN-Transformation entsteht ebenfalls aus der Bilinearform des HADAMARD-Produkts.

Wir benötigen im folgenden die Vertauschbarkeit der Bilinearform mit dem Maßintegral. Diese ist Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 4.3.7. *Es sei* Ω *ein Kompaktum und* $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ *eine offene Menge,* $f : \Omega \times G \to \mathbb{C}$ *stetig und in der 2. Variablen holomorph und* $g \in H(G^\dagger)$*. Ferner sei* μ *ein komplexes* BOREL-*Maß auf* Ω*. Dann ist*

$$\int < z \mapsto f(t,z) \mid g > d\mu(t) =< z \mapsto \int f(z,t)\ d\mu(t) \mid g > .$$

Beweis. Es ist $f_t(z) := f(t,z) \in H(G)$ für alle $t \in \Omega$. Da $g \in H(G^\dagger)$, gibt es eine offene Menge $U \Supset G^\dagger$ mit $g \in H(U)$. Somit ist $K := U^\dagger \Subset G$. Also gibt es ein Maß ν mit Träger in $G \setminus K$, so daß $0, \infty \notin \operatorname{supp} \nu$ ist, und

$$< f_t \mid g >= (f_t * g)(1) = \int f_t(\frac{1}{s})\ \frac{d\nu(s)}{s}.$$

Nach dem Satz von FUBINI müssen wir lediglich zeigen, daß die Funktion $(s,t) \mapsto \frac{1}{s} f(t, \frac{1}{s}) \in L_1(\mu \times \nu)$ ist. Dies ist offensichtlich, denn

$$\int\int |f(t,\frac{1}{s})|\ d|\mu|(t)\ \frac{d|\nu|(s)}{|s|} \leq \|f\|_\infty\ \frac{|\mu|(\Omega) \cdot |\nu|(\mathbb{C})}{\operatorname{dist}(0, \operatorname{supp} \nu)} < \infty,$$

wobei wir mit $\|f\|_\infty$ das essentielle Supremum meinen. Somit erhalten wir die Vertauschbarkeit der Integrale, so daß gilt

$$\int < z \mapsto f(t,z) \mid g > d\mu(t) = \int\int f(t,\frac{1}{s})\ \frac{d\nu(s)}{s}\ d\mu(t)$$

$$= \int\int f(t,\frac{1}{s})\ d\mu(t)\ \frac{d\nu(s)}{s} =< z \mapsto \int f(t,z) d\mu(t) \mid g > .$$

□

§ 4 Darstellung stetiger, linearer Funktionale

Nachdem wir nun gesehen haben, daß durch die Bilinearform 4.3.3 jede Funktion $p \in H(G^\dagger)$ ein stetiges, lineares Funktional auf $H(G)$ induziert, und wir einige Funktionale durch Funktionen aus $H(G^\dagger)$ darstellen konnten, stellt sich die Frage, ob dies für alle stetigen linearen Funktionale möglich ist. Unsere Vermutung ist also, daß die Abbildung

$$\dagger : p \in H(G^\dagger) \mapsto H(G)^\dagger : p^\dagger(f) := < p \mid f > \quad \text{für alle} \;\; f \in H(G)$$

surjektiv ist, wobei wir mit $H(G)^\dagger$ den Raum der stetigen, linearen Funktionale auf $H(G)$ bezeichnen.

Die Frage nach der Gestalt der, in der Literatur auch analytische Funktionale genannten, stetigen, linearen Funktionale auf $H(G)$ wurde bereits 1951 von Köthe in [Kö] zum ersten Male beantwortet. Köthe bewies, daß eine wechselseitige Dualität zwischen den Räumen $H(G)$ und $H(\mathbb{C}_\infty \setminus G)$ besteht, und daß der Dualraum $H(G)^\dagger$ isometrisch isomorph zu $H(\mathbb{C}_\infty \setminus G)$ ist. Wobei er die Isometrie der beiden Räume durch

$$f \in H(\mathbb{C}_\infty \setminus G) \mapsto \phi_f \in H(G)^\dagger : \phi(f)(g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(t)g(t)dt$$

für einen geeigneten Zyklus Γ angab. Er verwendete für den Beweis der Isometrie Sätze von Mackey, die sicher stellen, daß schwache und starke Konvergenz in dem Montel-Raum $H(G)$ übereinstimmen. Im Buch von Trèves ([T], 1967) finden wir diese Resultate in zum Teil stark verallgemeinerter Form wieder. Sowie die Tatsache, daß jeder Montel-Raum reflexiv ist. Ein etwas elementarerer Ansatz wurde in [LR, S. 67-74] (1984) präsentiert, der jedoch nur die Vektorraum Isomorphie von $H(G)$ und $H(\mathbb{C}_\infty \setminus G)$ mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes und der Cauchy-Transformation bewies. Ein gänzlich anderer Ansatz, die stetigen, linearen Funktionale darzustellen, wurde von Brooks in [Br1] (1964) mit Hilfe des Hadamard-Produktes für den Raum $H(\mathbb{D})$ angegeben. Ziel dieses Abschnittes ist nun, Brooks' Ansatz auf alle offenen oder kompakten Mengen $X \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ zu verallgemeinern und mit Hilfe des Hadamard-Produktes und der daraus resultierenden Bilinearform einen elementaren Beweis für die Isomorphie der Räume $H(G)^\dagger$ und $H(G^\dagger)$ anzugeben.

Um zu sehen, daß im Fall offener Mengen $G \subseteq \mathbb{C}$ jedes Funktional aus $H(G)^\dagger$ von einer holomorphen Funktion $h \in H(G^\dagger)$ erzeugt wird, gehen wir analog zum Beweis des Darstellungssatzes in [LR] vor. Der wesentliche Ansatz ist die Erweiterbarkeit jedes stetigen, linearen Funktionals auf einen Raum $H(K)$, wobei $K \Subset G$ kompakt ist. Anders ausgedrückt, besitzt jedes $\phi \in H(G)^\dagger$ einen kompakten Träger $K \Subset G$. Diese Tatsache wird in

[LR] nur am Rande erwähnt, jedoch in [BNS, S. 92ff] in einer wesentlich allgemeineren Form in Verbindung mit dem RIESZschen Darstellungssatz für Räume stetiger Funktionen bewiesen.

Lemma 4.4.1. *Es sei $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ offen und $\phi \in H(G)^\dagger$. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \Subset G$ und ein $\Phi \in H(K)^\dagger$ mit $\Phi|_{H(G)} = \phi$.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung an, $G \subseteq \mathbb{C}$. Andernfalls bilden wir G durch eine gebrochen lineare, konforme Abbildung auf ein Teilgebiet von $\mathbb{C}$ ab.
$H(G)$ ist ein abgeschlossener Unterraum des lokal konvexen, toplogischen Vektorraums $C(G)$. Nach dem Satz von HAHN-BANACH können wir ϕ zu einem stetigen, linearen Funktional auf $C(G)$ fortsetzen. Wir zeigen $\operatorname{supp}\phi$ ist kompakt, und nehmen dafür das Gegenteil an.
Wir betrachten die Kompakta $K_n = \{z \in G \mid |z| \leq n \text{ und } \operatorname{dist}(z, G^c) \geq \frac{1}{n}\}$. Nach unserer Annahme gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n \in C(G)$ mit $\operatorname{supp} f_n \subseteq G \setminus K_n$ und $\phi(f_n) \neq 0$. Ohne Einschränkung können wir $\phi(f_n) = 1$ annehmen, indem wir andernfalls $\frac{f_n}{\phi(f_n)}$ betrachten.
Für alle $K \Subset G$ ist $K \subseteq K_n$ ab einem Index $N_0(K) \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq N_0(K)$ ist $f_n|_K = 0$, da $\operatorname{supp} f_n \subseteq G \setminus K_n \subseteq G \setminus K$ ist. Also ist $f_n \to 0$ in $C(G)$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von ϕ

$$1 = \phi(f_n) \to \phi(0) = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also muß $K := \operatorname{supp}\phi$ kompakt sein.
Es seien $f, g \in C(G)$ mit $f = g$ in einer offenen Umgebung U von K. Dann ist $(f-g)|_U = 0$. Also ist

$$\operatorname{supp}(f-g) \subseteq G \setminus U \subseteq G \setminus K \quad \text{und damit } \phi(f-g) = 0.$$

Auf der anderen Seite gibt es eine kompakte Umgebung K_U von K welche in U enthalten ist. Nach dem TIETZEschen Erweiterungssatz kann jede stetige Funktion $h \in C(K_U)$ auf $C(G)$ unter Beibehaltung der Supremums-Norm fortgesetzt werden.
Für alle $f \in H(K)$ gibt es eine offene Umgebung $U \Supset K$ auf die sich f holomorph fortsetzen läßt. Wir schränken diese Funktion auf K_U ein, setzen sie zu einer stetigen Funktion $f^U \in C(G)$ fort und definieren

$$\Phi(f) := \phi(f^U).$$

Dann ist nach den Vorüberlegungen $\Phi : H(K) \to \mathbb{C}$ wohldefiniert, da $\phi(f^U)$ nicht von den Werten außerhalb von K_U abhängt. Offenbar ist Φ linear und $\Phi|_{H(G)} = \phi$. Wir müssen lediglich noch zeigen, daß Φ stetig auf $H(K)$ ist.
Dazu geben wir uns eine Nullfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ in $H(K)$ vor. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \Supset K$, so daß $f_n \to 0$ in $H(U)$. Dann ist

$$\|f_n^U\|_G = \sup_{z\in G} |f_n^U(z)| = \|f_n\|_{K_U} = \sup_{z\in K_U} |f_n(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit ist $\Phi(f_n) = \phi(f_n^U) \to 0 \quad (n \to \infty)$ und folglich Φ stetig. $\square$

Daraus ergibt sich nun sehr einfach der angestrebte Darstellungssatz für stetige, lineare Funktionale.

Satz 4.4.2 (Darstellungssatz für lineare Funktionale)**.** *Es sei $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ offen oder kompakt. Eine Abbildung $\phi : H(G) \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein stetiges, lineares Funktional, wenn es eine Funktion $\phi^\dagger \in H(G^\dagger)$ gibt, so daß*

$$\phi(f) =< \phi^\dagger \mid f >= (\phi^\dagger * f)(1) \quad \textit{für alle } f \in H(G).$$

Insbesondere ist $\dagger : H(G)^\dagger \to H(G^\dagger)$ ein Isomorphismus.

Wir bemerken dabei, im Falle $G = \mathbb{D}$ ist $\mathbb{D}^\dagger = \overline{\mathbb{D}}$, so daß der Brooksche Darstellungssatz ein Spezialfall dieser Aussage ist.

Beweis. Wir haben in Korollar 4.3.3 bereits gesehen, daß $< \mid >$ eine stetige Bilinearform ist, so daß für alle $h \in H(G^\dagger)$ die Abbildung

$$h^\dagger : H(G) \to \mathbb{C} : f \mapsto < h \mid f >= (h * f)(1)$$

ein stetiges, lineares Funktional ist. Das heißt $h^\dagger \in H(G)^\dagger$.
Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, geben wir uns eine offene Menge $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ und ein $\phi \in H(G)^\dagger$ vor. Nach dem vorangegangenen Lemma und dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es ein Maß μ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\mu \Subset G$, so daß

$$\phi(f) = \int f \, d\mu \quad \text{für alle} \quad f \in H(\operatorname{supp}\mu).$$

Nach Beispiel 4.3.5 gilt für alle $f \in H(G)$ und $z \in G$

$$f(z) =< t \mapsto \frac{1}{1 - zt} \mid f > .$$

Nach Lemma 4.3.7 folgt damit

$$\phi(f) = \int f(t)\ d\mu(t) = \int < z \mapsto \frac{1}{1-zt} \mid f > \ d\mu(t)$$
$$=< z \mapsto \int \frac{1}{1-zt}\ d\mu(t) \mid f >=:< \mu^\dagger \mid f > .$$

Dabei erhalten wir als konjugierte Funktion eine Abwandlung der CAUCHY-Transformierten.

$$\mu^\dagger(z) = \int \frac{1}{1-zt}\ d\mu(t) = \frac{1}{z}\ \mu^*(\frac{1}{z}) \in H(\frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus \operatorname{supp}\mu}) = H((\operatorname{supp}\mu)^\dagger) \subseteq H(G^\dagger).$$

Da μ und ϕ inhaltlich identisch sind, definieren wir

$$\phi^\dagger(z) := \mu^\dagger(z) = \int \frac{1}{1-zt}\ d\mu(t) = \phi(t \mapsto \frac{1}{1-zt}).$$

Somit gilt für alle $h \in H(G^\dagger)$

$$h^{\dagger\dagger}(z) = h^\dagger(t \mapsto \frac{1}{1-zt}) =< h \mid t \mapsto \frac{1}{1-zt} >= h(z)$$

nach Beispiel 4.3.5. Ebenso gilt für alle $\phi \in H(G)^\dagger$ und $f \in H(G)$

$$\phi^{\dagger\dagger}(f) =< \phi^\dagger \mid f >= \phi(f).$$

Damit haben wir Satz 4.4.2 im Falle der offenen Mengen $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ bewiesen. Es bleibt lediglich der Fall der kompakten Mengen $K \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$. Es sei $\mathfrak{G}(K)$ die Menge aller offenen Mengen $G \Supset K$. Dann ist $\phi \in H(K)^\dagger$ genau dann, wenn $\phi \in H(G)^\dagger$ für alle $G \in \mathfrak{G}(K)$ ist. Dies ist nach dem ersten Teil äquivalent mit der Bedingung $\phi^\dagger \in H(G^\dagger)$ für alle $G \in \mathfrak{G}(K)$, und damit zu der Aussage

$$\phi^\dagger \in \bigcap_{G\in\mathfrak{G}(K)} H(\frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus G}) = H(\bigcup_{G\in\mathfrak{G}(K)} \frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus G}) = H(\frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcap_{G\in\mathfrak{G}(K)} G})$$
$$= H(\frac{1}{\mathbb{C}_\infty \setminus K}) = H(K^\dagger).$$

□

Nachdem wir uns von der Isomorphie der Räume $H(G)^\dagger$ und $H(G^\dagger)$ überzeugen konnten, wollen wir nun noch die Homöomorphie der beiden Räume überprüfen. Wir statten dazu $H(G)^\dagger$ mit der von den Seminormen

$$\|\phi\|_{\mathfrak{F}} := \sup_{f\in\mathfrak{F}} |\phi(f)| \quad \text{mit } \mathfrak{F} \Subset H(G) \text{ kompakt}$$

erzeugten Topologie aus. Nach dem Satz von MONTEL ist diese Topologie identisch, mit der durch die Seminormen erzeugten Topologie, welche durch die beschränkten Familien erzeugt wird. Wir erhalten nun die folgende Homöomorphie.

Satz 4.4.3. *Es sei $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ eine offene Menge. Dann ist die Abbildung $\dagger : f \in H(G) \mapsto f^\dagger \in H(G^\dagger)^\dagger$ ein Homöomorphismus.*

Wir beachten hierbei die doppelte Verwendung des Symbols $\dagger$, welches zum einen jeder Funktion ein Funktional zuordnet, zum anderen jedem stetigen, linearen Funktional die darstellende Funktion. Wir verwenden diese Notation, da keine Verwechslungsgefahr dabei entsteht, aber die daraus resultierende Identität $\phi^{\dagger\dagger} = \phi$ bzw. $f^{\dagger\dagger} = f$ den Umgang mit der Darstellung erheblich vereinfacht.

Beweis. Wir wissen bereits, daß $\dagger$ bijektiv und linear ist. Wir müssen also lediglich die Stetigkeit und die Offenheit der Abbildung zeigen. Da wir noch nicht wissen, ob $H(G^\dagger)^\dagger$ metrisierbar ist, verwenden wir dafür Netze.
Es sei $(f_\delta)_{\delta \in D}$ ein Nullnetz in $H(G)$. Wir zeigen, daß dann auch $(f_\delta^\dagger)_{\delta \in D}$ ein Nullnetz in $H(G^\dagger)^\dagger$ sein muß, in dem wir das Gegenteil annehmen. In diesem Fall gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, ein $\mathfrak{F} \Subset H(G^\dagger)$ kompakt, und ein Subnetz $(f_{\sigma\delta})_{\delta \in D'}$, so daß $|f_{\sigma\delta}^\dagger(h_\delta)| \geq \epsilon_0$ für jeweils ein $h_\delta \in \mathfrak{F}$ und alle $\delta \in D'$ gilt. Da $\mathfrak{F}$ kompakt ist, gibt es ein in $H(G^\dagger)$ konvergentes Subnetz $(h_{\tau\delta})_{\delta \in D''}$ mit Grenzwert $h \in \mathfrak{F}$. Dann ist nach Korollar 4.3.3

$$f_{\sigma\tau\delta}^\dagger(h_{\tau\delta}) =< f_{\sigma\tau\delta} \mid h_{\tau\delta} > \quad \longrightarrow \quad < 0 \mid h >= 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|f_{\sigma\tau\delta}^\dagger(h_{\tau\delta})| \geq \epsilon_0$ für alle $\delta \in D''$. Somit ist $\dagger$ stetig.
Zum Beweis der Stetigkeit der Umkehrfunktion $\phi \in H(G^\dagger)^\dagger \mapsto \phi^\dagger \in H(G)$, betrachten wir ein Nullnetz $(\phi_\delta)_{\delta \in D}$ in $H(G^\dagger)^\dagger$, eine kompakte Menge $K \Subset G$ und die Abbildung

$$\kappa : G \to H(G^\dagger) \quad \kappa(a) := (z \mapsto \chi(az) = \frac{1}{1 - a \cdot z}).$$

Nach Beispiel 4.3.5 ist $< h \mid \kappa(a) >= h(a)$ für alle $h \in H(G)$ und $a \in G$. Das heißt

$$\|\phi^\dagger\|_K = \sup_{a \in K} |\phi^\dagger(a)| = \sup_{a \in K} | < \phi^\dagger \mid \kappa(a) > | = \sup_{f \in \kappa(K)} |\phi(f)| = \|\phi\|_{\kappa(K)}.$$

Das heißt, die Abbildung $\phi \in H(G)^\dagger \mapsto \phi^\dagger \in H(G^\dagger)$ ist stetig, und damit $\dagger$ ein Homöomorphismus. $\square$

Leider gibt es keinen vergleichbar elementaren Beweis für die Homöomorphie der Räume $H(G^\dagger)$ und $H(G)^\dagger$. Wir geben deshalb einen kurzen Beweis an, der sich auf die Ergebnisse aus [T] und [Kö] stützt. TRÈVES zeigt in [T, S. 376], daß jeder MONTEL-Raum reflexiv ist. Ein MONTEL-Raum ist ein tonnelierter, lokal konvexer, HAUSDORFF-Vektorraum in dem jede beschränkte, abgeschlossene Menge kompakt ist. $H(G)$ ist ein FRÉCHET-Raum, damit tonneliert (s. [T, S. 347]), nach dem Satz von MONTEL ein MONTEL-Raum und somit reflexiv. Nach KÖTHE ist jeder Raum $H(K), K \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ kompakt, ein starker Dualraum von $H(\mathbb{C}_\infty \setminus K)$ (s. [Kö, S. 41]), wodurch auch $H(K)$ reflexiv wird. Die Reflexivität von $H(G^\dagger)$ ermöglicht nun eine einfache Übertragung von Satz 4.4.3 auf die Kompakta $G^\dagger$.

Satz 4.4.4. *Es sei $G \subsetneqq \mathbb{C}_\infty$ eine offene Menge. Dann ist die Abbildung $\dagger : f \in H(G^\dagger) \mapsto f^\dagger \in H(G)^\dagger$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Gemäß unserer Vorüberlegung ist $H(G^\dagger)$ reflexiv. Es sei

$$\Gamma : H(G^\dagger) \to H(G^\dagger)^{\dagger\dagger} \;:\; \Gamma(f)(\phi) = \phi(f) \quad \text{für alle} \;\; \phi \in H(G^\dagger)^\dagger,\; f \in H(G^\dagger)$$

die kanonische Einbettung, die aufgrund der Reflexivität ein Homöomorphismus ist. Wir bezeichnen im folgenden den aus Satz 4.4.3 bekannten Homöomorphismus mit

$$\tau : H(G) \to H(G^\dagger)^\dagger : \tau(f) = f^\dagger.$$

Dann gibt es einen konjugierten Homöomorphismus

$$\tau^\dagger : H(G^\dagger)^{\dagger\dagger} \to H(G)^\dagger : \tau^\dagger(\phi)(f) = \phi(\tau(f)) \quad \text{für alle} \;\; \phi \in H(G^\dagger)^{\dagger\dagger}, f \in H(G).$$

Daraus ergibt sich ein verketteter Homöomorphismus

$$\tau^\dagger \circ \Gamma : H(G^\dagger) \to H(G)^\dagger.$$

Und es gilt für alle $f \in H(G^\dagger)$ und alle $h \in H(G)$

$$(\tau^\dagger \circ \Gamma)(f)(h) = \Gamma(f)(\tau(h)) = \tau(h)(f) = h^\dagger(f) = < h \mid f > = < f \mid h > = f^\dagger(h)$$

Das heißt, $\tau^\dagger \circ \Gamma = \dagger$ und damit ist $\dagger : H(G^\dagger) \to H(G)^\dagger$ selbst ein Homöomorphismus. □

§ 5 Analytische Funktionale in Hadamard-Algebren

Nachdem wir nun gesehen haben, daß sich Räume analytischer Funktionale mit Hilfe des Hadamard-Produktes isometrisch isomorph auf Räume holomorpher Funktionen abbilden lassen, wollen wir dies verwenden, um die Struktur der Hadamard-Algebren weiter zu untersuchen. Wir beginnen mit einem bemerkenswerten Zusammenhang bezüglich des Hadamardschen Mengenproduktes.

Lemma 4.5.1. *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann zulässig, wenn $G * G^\dagger = G^\dagger$ ist.*

Beweis. Wir betrachten ein zulässiges Gebiet G. Dann ist

$$G * G^\dagger \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{1\}) * G^\dagger = G^\dagger.$$

Es sei $z \in (G * G^\dagger)^c = G^c \cdot G^{\dagger^c}$. Dann gibt es ein $x \notin G^\dagger$ und ein $y' \in G^c$ mit $z = x \cdot y'$. Folglich ist $y = \frac{1}{y'} \in G^\dagger$ und $x = y \cdot z$. Wir nehmen an, $z \in G^\dagger$. Dann ist

$$x = y \cdot z \in G^\dagger \cdot G^\dagger \subseteq G^\dagger \quad \text{ein Widerspruch zu } x \notin G^\dagger.$$

Somit ist $G^\dagger \subseteq G * G^\dagger$ und damit $G * G^\dagger = G^\dagger$.
Die entgegengesetzte Implikation erhalten wir, in dem wir die Gleichung $G * G^\dagger = G^\dagger$ voraussetzen. Dann ist

$$\frac{1}{G} = G^{\dagger^c} = (G * G^\dagger)^c = G^c \cdot G^{\dagger^c} = G^c \cdot \frac{1}{G}.$$

Das heißt,

$$G = G \cdot \frac{1}{G^c} = G \cdot G^\dagger.$$

Wir betrachten zwei Elemente $x, y \in G^c$ und nehmen an $z = x \cdot y \in G$. Dann ist

$$\frac{1}{y} \in G^\dagger \quad \text{und folglich} \quad x = z \cdot \frac{1}{y} \in G \cdot G^\dagger = G,$$

was einen Widerspruch zu $x \in G^c$ ergibt. □

Wir erhalten daraus ein interessantes Kriterium für die Invertierbarkeit in Hadamard-Algebren.

Satz 4.5.2. *Es sei G ein zulässiges Gebiet. Eine Funktion $f \in H(G)$ mit $\widehat{f}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist genau dann invertierbar in der* HADAMARD-*Algebra $H(G)$, wenn für alle Folgen $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ in $H(G^\dagger)$ die folgende Implikation richtig ist*

$$f * h_n \to 0 \quad \textit{in } H(G^\dagger) \quad \Longrightarrow \quad h_n(1) \to 0.$$

Beweis. Wir betrachten den Raum

$$U := f * H(G^\dagger) \subseteq H(G) * H(G^\dagger) \subseteq H(G * G^\dagger) = H(G^\dagger),$$

und definieren auf diesem eine Abbildung

$$\phi : U \to \mathbb{C} \;:\; \phi(f * h) := h(1).$$

Da $\widehat{f}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist $f * h = 0$ genau dann, wenn $h = 0$ ist, und somit ϕ wohldefiniert. ϕ ist offenbar linear und nach Voraussetzung stetig. Also kann ϕ nach dem Satz von HAHN-BANACH zu einem stetigen, linearen Funktional aus $H(G^\dagger)^\dagger$ fortgesetzt werden, welches nach Satz 4.4.2 durch eine Funktion $\phi^\dagger \in H(G)$ erzeugt wird. Somit ist

$$< \phi^\dagger * f \mid h >=< \phi^\dagger \mid f * h >= \phi(f * h) = h(1) =< \chi \mid h > \quad \text{für alle } h \in H(G^\dagger),$$

und damit $\phi^\dagger * f = \chi$ nach Satz 4.4.2. Das heißt, f ist invertierbar in $H(G)$.
Die umgekehrte Richtung erkennen wir wie folgt. Wir gehen davon aus, daß f ein HADAMARD-inverses Element $f^{<-1>} \in H(G)$ besitzt. Dann ist

$$h_n(1) =< \chi \mid h_n >=< f^{<-1>} * f \mid h_n >=< f^{<-1>} \mid f * h_n > \quad \longrightarrow \quad < f^{<-1>} \mid 0 >= 0.$$

□

Wir können dieses Kriterium unmittelbar in eine Abschätzung umwandeln, die wie folgt lautet.

Korollar 4.5.3. *Es sei G ein zulässiges Gebiet. Eine Funktion $f \in H(G)$ mit $\widehat{f}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist genau dann invertierbar in der* HADAMARD-*Algebra $H(G)$, wenn es für alle kompakten Umgebungen K von $G^\dagger$ eine konstante c_K gibt, so daß*

(5.10) $$|h(1)| \leq c_K \, \|f * h\|_K \quad \textit{für alle} \;\; h \in H(K).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Ungleichung hinreichend für die Invertierbarkeit ist, indem wir Satz 4.5.2 verwenden.
Es sei dazu $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $H(G^\dagger)$, so daß $f * h_n \longrightarrow 0$ in $H(G^\dagger)$. Dann gibt es eine offene Umgebung U, so daß die Konvergenz auch in $H(U)$ bestehen bleibt und damit auch in jeder kompakten Umgebung $K \Subset U$ von $G^\dagger$. Nach Voraussetzung ist dann

$$|h_n(1)| \leq c_K \; \|f * h_n\|_K \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

und damit f invertierbar.
Für die umgekehrte Implikation setzen wir die Invertierbarkeit von f voraus und nehmen an, es gebe eine kompakte Umgebung K von $G^\dagger$, die 5.10 für kein $c < \infty$ erfüllt, das heißt, es gibt eine Folge von Funktionen $h_n \in H(K)$ mit $|h_n(1)| > n \cdot \|f * h_n\|_K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen der Homogenität von 5.10 können wir ohne Einschränkung $h_n(1) = 1$ voraussetzen. Somit folgt

$$\|f * h_n\|_K < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Nach Satz 4.5.2 folgt daraus $1 = |h_n(1)| \longrightarrow 0$, was uns zu einem Widerspruch führt. □

Wir wollen daraus nun einen Test für Invertierbarkeit ableiten. Da wir die Frage nach der Invertierbarkeit in Hadamard-Algebren über mehrfach zusammenhängenden, zulässigen Gebieten bereits in Satz 3.4.9 vollständig gelöst haben, beschränken wir uns hier auf die übrigen Hadamard-Algebren, also jene über einfach zusammenhängenden, zulässigen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$.
Wenn G einfach zusammenhängend ist, so ist auch $\mathbb{C}_\infty \setminus G$ einfach zusammenhängend und damit auch $G^\dagger$. Nach dem Satz von Runge liegt die Menge aller Polynome $\mathbb{C}[z]$ dicht in $H(G^\dagger)$. Die Stetigkeit der beiden Seiten von 5.10 läßt uns schließen, daß f genau dann invertierbar ist, wenn 5.10 für alle $h \in \mathbb{C}[z]$ erfüllt ist. Der Vorteil der Reduktion auf Polynome ist die Anwendbarkeit der Potenzreihendarstellung für $f * h$, die für $H(G^\dagger)$-Funktionen im allgemeinen nicht gegeben ist. Wir können auch hier, wegen der Homogenität von 5.10 voraussetzen, daß

$$1 = h(1) = \sum_{n=0}^{\operatorname{grad} h} \widehat{h}(n) =: \sum_{n=0}^{N} \lambda_n .$$

Wir bezeichnen die Menge aller endlichen Zahlenfolgen, deren Summe 1 ist, mit Λ. Wir erhalten somit den folgenden Test für Invertierbarkeit.

Satz 4.5.4. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes, zulässiges Gebiet. Eine Funktion $f \in H(G)$ mit $\widehat{f}(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist genau dann invertierbar in der* HADAMARD-*Algebra $H(G)$, wenn es für alle kompakten Umgebungen K von $G^\dagger$ eine Konstante $c_K > 0$ gibt, so daß*

$$\| \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \ \widehat{f}(n) \ z^n \|_K \geq c_K \quad \textit{für alle} \ \ \lambda \in \Lambda.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $z_\lambda \in K$ gibt, so daß

$$| \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \ \widehat{f}(n) \ z_\lambda^n | \geq c_K.$$

Literaturverzeichnis

[BNS] L. Beckenstein, L. Narici und C. Suffel, *Topological Algebras*, North Holland, Amsterdam, 1977.

[Bi] L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer Verlag, Berlin, 1955.

[Bo] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press Inc., New York, 1954.

[Br1] R. M. Brooks, *A Ring of analytic functions*, Studia Math. **24** (1964), 191-210.

[Br2] R. M. Brooks, *A Ring of analytic functions Pt II*, Studia Math. **39** (1971), 199-208.

[BM1] R. Brück und J. Müller, *Invertible elements in a convolution algebra of holomorphic functions*, Math. Ann. **294** (1992), 421-438.

[BM2] R. Brück und J. Müller, *Closed ideals in a convolution algebra of holomorphic functions*, Canad. J. Math. **47** (1995), 915-928.

[BR] R. Brück und H. Render, *Invertibility of holomorphic functions with respect to the Hadamard product*, Complex Variables Theory Appl. **42** (2000), 207-223.

[C] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer, New York, 1995

[H] Jacques Hadamard, *Théorème sur le séries entieres*, Acta. Math. 22 (1899), 55-63

[Kö] Gottfried Koethe, *Dualität in der Funktionentheorie*, Journal für Mathematik Bd. 191, Heft 1/2 (1953), 30-49

[LR] D.H. Luecking und L.A. Rubel, *Complex Analysis, A Functional Analysis Approach*, Springer Verlag, NewYork, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.

[M1] J. Müller, *The Hadamard multiplication theorem and applications in summability theory*, Complex Variables Theory Appl. **18** (1992), 155-166.

[M2] J. Müller, *Multipliers from $H(G_1)$ into $H(G_2)$*, Arch. Math. **61** (1993), 75-81.

[P] P. Porcelli, *Linear spaces of analytic functions*, Rand McNally and Co., Chicago, 1966.

[Po] T. Pohlen, *The Hadamard product and universal power series*, Dissertation, Universität Trier, 2009.

[RS1] H. Render und A. Sauer, *Algebras of holomorphic functions with Hadamard multiplication*, Studia Math. **118** (1996), 77-100.

[RS2] H. Render und A. Sauer, *Invariance properties of homomorphisms on algebras of holomorphic functions with Hadamard multiplication*, Studia Math. **121** (1996), 53-65.

[RS3] H. Render und A. Sauer, *Multipliers on vector spaces of holomorphic functions*, Nagoya Math. **159** (2000), 167-178.

[T] F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press Inc., New York, 1967.

[W] R. C. Walker, *The Stone Čech compactification*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, 1974.

[Z] J. Zohner, *Räume Maximaler Ideale in Algebren Holomorpher Funktionen mit Hadamard-Multiplikation*, Diplomarbeit, Universität Gießen, 2001.

Persönliche Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Disseration selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nichtveröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis niedergelegt sind, eingehalten. Ich versichere, dass Dritte von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen, oder habe diese nachstehend spezifiziert. Die vorgelegte Arbeit wurde weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde zum Zweck einer Promotion oder eines anderen Prüfungsverfahrens vorgelegt. Alles aus anderen Quellen und von anderen Personen übernommene Material, das in der Arbeit verwendet wurde oder auf das direkt Bezug genommen wird, wurde als solches kenntlich gemacht. Insbesondere wurden alle Personen genannt, die direkt und indirekt an der Entstehung der vorliegenden Arbeit beteiligt waren. Mit der Überprüfung meiner Arbeit durch eine Plagiatserkennungssoftware bzw. ein internetbasiertes Softwareprogramm erkläre ich mich einverstanden

Gießen, 21.01.2013 Jochen Zohner